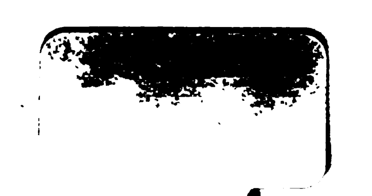



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)


SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)



NEUE GRUNDLAGEN

EINER THEORIE

DER ALLGEMEINEN THETAFUNCTIONEN

VON

Dr. A. KRAZER
PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT
STRASSBURG.

UND

Dr. F. PRYM
PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT
WÜRZBURG.

KURZ ZUSAMMENGEFASST UND HERAUSGEGEBEN

VON

Dr. A. KRAZER.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1892.

Vorwort.

Die vorliegende Arbeit enthält die Resultate jener Untersuchungen, welche mein hochverehrter Lehrer und ich während der Jahre 1883—1888 gemeinsam angestellt haben. Diese Untersuchungen lagen Ende 1888 soweit ausgearbeitet und zu einem geschlossenen Ganzen vereinigt vor, dass bei weiterer gemeinsamer Thätigkeit die Herausgabe derselben im Laufe der nächsten zwei Jahre hätte erfolgen können. Da wurden wir, die bis dahin täglich zu gemeinsamer Arbeit zusammengekommen waren, durch meine Berufung hierher getrennt und erkannten, nunmehr ausschliesslich auf schriftlichen Verkehr angewiesen, bald, dass unter so geänderten Verhältnissen bis zur Veröffentlichung unserer Untersuchungen in der von uns beabsichtigten ausführlichen Weise noch eine Reihe von Jahren erforderlich sein würde. Nun schien es uns aber aus mehrfachen Gründen wünschenswerth, die Resultate unserer Untersuchungen baldmöglichst in den Händen der Mathematiker zu sehen, und wir beschlossen daher, dass ich aus unseren Manuscripten einen Auszug veröffentlichen solle, der die von uns gewonnenen Resultate vollständig enthalten, zugleich aber auch einen genauen Einblick in die angewendeten Methoden gewähren würde. Indem ich diesen Auszug hiermit der Öffentlichkeit übergebe, will ich es nicht unterlassen, zur Orientirung des Lesers das Folgende hinzuzufügen.

Als Herr Prym im Jahre 1879 seine Untersuchungen über die allgemeinen Thetafunctionen mit p Variablen und rationalen Charakteristiken begann, waren nur wenige dahin gehörige Formeln bekannt. Diese Formeln bezogen sich fast ausschliesslich auf Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus halben Zahlen gebildet sind, und zu ihrer Ableitung wurde ausnahmslos der auf functionentheoretischen Betrachtungen beruhende Hermite'sche Satz in Verbindung mit der Methode der unbestimmten Coefficienten angewendet, ein Verfahren, das in den wenigsten Fällen die wahre Natur der mit seiner Hülfe erhaltenen Formeln erkennen lässt. Für seine ersten

Arbeiten *), die zu Anfang des Jahres 1882 abgeschlossen wurden, hatte nun Herr Prym sich die Aufgabe gestellt, die bis dahin bekannten Relationen zwischen Thetafunctionen mit denselben Parametern aus einer einzigen Formel, der von ihm mitgetheilten und bewiesenen Riemann'schen Thetaformel, auf directem Wege abzuleiten und neue Systeme specieller Formeln aufzustellen, zugleich aber auch eine allgemeinere, die Riemann'sche als speciellen Fall enthaltende Formel zu finden, die ein Eindringen in das Gebiet der Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus beliebigen rationalen Zahlen gebildet sind, ermöglichte. Die vorgesteckten Ziele wurden nun zwar erreicht, jedoch musste zur Ableitung der Hauptformel immer noch die Methode der unbestimmten Coefficienten verwendet werden.

Der entscheidende Fortschritt in der angegebenen Richtung wurde gemacht, als Herr Prym im Juli 1882 fand, dass man für die Riemann'sche Thetaformel ausser den beiden von ihm schon veröffentlichten Beweisen noch einen dritten von ganz anderen Gesichtspunkten ausgehenden Beweis geben könne. **) Das eingeschlagene Verfahren bestand darin, dass man in der die linke Seite der Formel bildenden $4p$-fach unendlichen Reihe neue Summationsbuchstaben vermittelst einer linearen, schon von Jacobi ***) zu ähnlichem Zwecke angewendeten Substitution einführte und hierauf die Summation von der ihr anhaftenden Beschränkung durch Einschiebung eines discontinuirlichen Factors befreite. Aus der linken Seite der Riemann'schen Thetaformel ging alsdann durch directe Umformung die rechte hervor. Damit war ein Princip gewonnen, das, in richtiger Weise verallgemeinert, von fundamentaler Bedeutung für die Theorie der Thetafunctionen zu werden versprach. In der That gelang es bald darauf Herrn Prym, mit Hülfe dieses Princips eine Thetaformel †) herzustellen, welche seine frühere Hauptformel an Allgemeinheit übertraf, und unsere nun beginnenden gemeinsamen Untersuchungen zeigten bald, dass man auf dem betretenen Wege noch weiter gelangen könne.

Der Gedanke, eine mehrfach unendliche Reihe, bei der jeder Summationsbuchstabe die ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, dadurch umzuformen, dass man an Stelle der Summationsbuchstaben vermittelst einer linearen Substitution neue einführt, findet sich schon in Arbeiten von Eisenstein ††); allein dort wird ausdrücklich die

---

*) Prym, Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie. Leipzig 1882. Teubner.

Prym, Kurze Ableitung der Riemann'schen Thetaformel. (Journal für r. u. a. Mathematik. Bd. 93, pag. 124)

**) Prym, Ein neuer Beweis für die Riemann'sche Thetaformel. (Acta mathematica, Bd. 3, pag. 201)

***) Jacobi, Theorie der elliptischen Functionen, aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet. (Gesammelte Werke, Bd. 1, pag. 503)

†) Prym, Ableitung einer allgemeinen Thetaformel. (Acta mathematica, Bd. 3, pag. 216)

††) Eisenstein, Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. VI. Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind. (Journal für r. u. a. Mathematik, Bd. 35, pag. 173, 190, 230)

Bedingung gesetzt, dass die Coefficienten der Substitution ganze Zahlen seien. Auch die von Herrn Schröter in seinen auf die Theorie der Modulargleichungen sich beziehenden Arbeiten *) angewendete Methode zur Ableitung von Thetaformeln beruht auf der Anwendung von linearen Substitutionen mit ganzen Zahlen als Coefficienten und ist wohl aus dem Grunde nicht weiter verfolgt worden, weil schon in einfachen Fällen die Bestimmung der Summation für die neu eingeführten Summationsbuchstaben bedeutende Schwierigkeiten verursacht. Der Gedanke dagegen, unendliche Reihen der angegebenen Art durch eine lineare Substitution, deren Coefficienten beliebige rationale Zahlen sind, umzuformen, ist zuerst von Herrn Prym ausgesprochen und durch Verbindung mit dem Gedanken der Einschiebung eines discontinuirlichen Factors fruchtbar gemacht worden.

In weiterer Verfolgung dieser Gedanken stellten wir uns beim Beginne unserer gemeinsamen Untersuchungen im Jahre 1883 zunächst die Aufgabe, ein Product von n Thetafunctionen mit verschiedenen Parametern in ähnlicher Weise umzuformen, wie es kurz zuvor für ein Product von n Thetafunctionen mit gleichen Parametern geschehen war. Zu dem Ende führten wir in die dem Producte der n Thetafunctionen entsprechende np-fach unendliche Reihe an Stelle der np Summationsbuchstaben $m_\mu^{(\nu)}, {}_{\mu=1,2,\ldots,p}^{\nu=1,2,\ldots,n}$, np neue Summationsbuchstaben $n_\mu^{(\nu)}, {}_{\mu=1,2,\ldots,p}^{\nu=1,2,\ldots,n}$, durch eine lineare Substitution, die in jeder ihrer Gleichungen nur Grössen m und n mit demselben unteren Index enthielt, ein und suchten alsdann die Coefficienten der Substitution als rationale Zahlen so zu bestimmen, dass nach Einschiebung eines passend gewählten discontinuirlichen Factors das vorgelegte Thetaproduct in eine Summe von Thetaproducten überging. Es zeigte sich, dass die gestellte Aufgabe identisch ist mit der Aufgabe, eine Summe von n quadratischen Formen mit je p Veränderlichen durch eine lineare Substitution der eben angegebenen Art mit rationalen Zahlen als Coefficienten in eine ebensolche Summe zu transformiren, und es wurde dadurch die Theorie der hierher gehörigen Thetaformeln auf eine rein arithmetische, im 2. Abschnitte des ersten Theiles entwickelte Grundlage gestellt. Alle diese Formeln sind in der im 3. Abschnitte aufgestellten Formel (Θ), die wir als die Fundamentalformel für die Theorie der Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken bezeichnen, als specielle Fälle enthalten. Die Gewinnung dieser Fundamentalformel gelang uns im Jahre 1884, und aus ihr leiteten wir dann zunächst die beiden im 4. und 5. Abschnitte mitgetheilten für die allgemeine Theorie der Thetafunctionen wichtigen speciellen Formeln ab.

Unsere nun beginnenden weiteren Untersuchungen bezweckten die Gewinnung charakteristischer Formeln für Thetafunctionen mit denselben Parametern, oder, da

---

*) Schröter, De aequationibus modularibus. Inaugural-Dissertation, Königsberg 1854.
Schröter, Über die Entwickelung der Potenzen der elliptischen Transcendenten ϑ und die Theilung dieser Functionen. Habilitationsschrift, Breslau 1855.

eine jede solche Formel zur Grundlage eine orthogonale Substitution mit rationalen Zahlen als Coefficienten hat, die Gewinnung charakteristischer orthogonaler Substitutionen der angegebenen Art. Ein wesentlicher Schritt in dieser Richtung war von mir schon im Jahre 1882 gemacht worden, als ich mich mit der Aufgabe beschäftigte, aus der von Herrn Prym kurz zuvor gewonnenen, schon oben erwähnten allgemeinen Formel eine specielle Formel abzuleiten, die für die Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, dasselbe leistet, wie die Riemann'sche Formel für die Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus halben Zahlen gebildet sind. Die zu diesem Zwecke damals von mir construirte, mit Dritteln ganzer Zahlen als Coefficienten gebildete und der in meiner Habilitationsschrift*) aufgestellten Thetaformel zu Grunde gelegte orthogonale Substitution liess sich nämlich infolge ihrer charakteristischen Bauart ohne Mühe verallgemeinern und führte so zu jener merkwürdigen mit r^{teln} ganzer Zahlen als Coefficienten gebildeten orthogonalen Substitution, welche der am Ende des 5. Abschnittes aufgestellten, schon früher von uns veröffentlichten Formel zu Grunde liegt. In Verfolgung des angegebenen Zieles stellten wir uns nun die Aufgabe, alle orthogonalen Substitutionen zu finden, deren Coefficienten halbe Zahlen sind, und gelangten bald auch zur vollständigen Lösung derselben. Unter den so erhaltenen Substitutionen zeichneten sich gewisse durch ihre reguläre Bauart aus, und von ihnen ausgehend erhielten wir dann, nachdem wir ihre wahre Natur erkannt hatten, durch Verallgemeinerung ähnlich gebaute orthogonale Substitutionen mit r^{teln} ganzer Zahlen als Coefficienten. Die so gewonnenen charakteristischen orthogonalen Substitutionen finden sich im 6. Abschnitte; die ihnen entsprechenden Thetaformeln dagegen werden im 7. Abschnitte aufgestellt und in Bezug auf ihren inneren Zusammenhang untersucht. Der 8. Abschnitt endlich enthält einige für die Anwendungen wichtige specielle Formeln.

Schon vor dem Abschlusse unserer auf die Theorie der Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken sich beziehenden Untersuchungen hatten wir uns, angeregt durch die Arbeiten der Herren Hermite**), Thomae***) und Weber†), im Laufe des Jahres 1883 wiederholt mit dem Probleme der Transformation der Thetafunctionen beschäftigt, jedoch

---

*) Krazer, Über Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. (Mathem. Annalen, Bd. 22, pag. 416)

**) Hermite, Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques. (Journal de Mathématiques pures et appliquées, Sér. II, t. III, pag. 26)

Hermite, Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes. (Comptes rendus, t. XL, pag. 249 u. flg.)

***) Thomae, Die allgemeine Transformation der Θ-Functionen mit beliebig vielen Variabeln. Inaugural-Dissertation, Göttingen 1864.

†) Weber, Über die unendlich vielen Formen der ϑ-Function. (Journal für r. u. a. Mathematik, Bd. 74, pag. 57)

Weber, Über die Transformationstheorie der Theta-Functionen, ins Besondere derer von drei Veränderlichen. (Annali di Matematica, Ser. II, t. IX, pag. 126)

dabei, der herrschenden Anschauung folgend, nur solche Transformationen in den Kreis unserer Betrachtungen gezogen, denen ganze Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ als Transformationszahlen entsprechen. Es war uns aber damals nicht gelungen, unsere Untersuchungen in dieser Richtung zu dem gewünschten Abschlusse zu bringen. Wir hatten uns nämlich die Aufgabe gestellt, die Transformation der Thetafunctionen auf demselben Wege, den wir für die Ableitung der auf Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken sich beziehenden Formeln mit Erfolg betreten hatten, also durch directe Umformung der Thetareihen durchzuführen und auf diese Weise auch die gesammte Transformationstheorie auf eine von der Methode der unbestimmten Coefficienten unabhängige Grundlage zu stellen; bei diesen Untersuchungen waren wir auf Schwierigkeiten gestossen, die uns zunächst unüberwindlich schienen. Da erkannte Herr Prym im Frühjahre 1885, dass man gewisse Thetaformeln als Transformationsformeln, denen gebrochene Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ als Transformationszahlen entsprechen, auffassen könne, und formulirte daraufhin das Problem der Transformation der Thetafunctionen in der im 1. Abschnitte des zweiten Theiles mitgetheilten allgemeinen Weise. Damit war der Bann gebrochen, der bis dahin auf der Transformationstheorie gelastet hatte, und nun konnten wir das Problem der Transformation in dem oben ausgesprochenen Sinne mit Erfolg in Angriff nehmen.

Zu jeder Transformation gehört eine bestimmte positive Zahl t, die eine ganze rationale Function der Transformationszahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ist und welche die Ordnungszahl der Transformation genannt wird. In der älteren Theorie, die nur ganze Zahlen als Transformationszahlen kennt, treten für t nur ganze positive Zahlen auf; in der vorliegenden Theorie dagegen kann t mit jeder rationalen positiven Zahl zusammenfallen. Eine Transformation, für die $t = 1$ ist, wird eine lineare Transformation genannt, da in diesem Falle die ursprüngliche Thetafunction mit den Argumenten u und den Parametern a, von einer einfachen Exponentialfunction abgesehen, sich stets linear durch Thetafunctionen mit den Argumenten v und den Parametern b ausdrückt. Der Schwerpunkt der neuen Theorie liegt in der linearen Transformation; mit den dahin gehörigen Problemen beschäftigten wir uns während der Jahre 1885—1887.

Zunächst leiteten wir durch directe Umformung der Thetareihe die drei im 2., 3. und 4. Abschnitte mitgetheilten Transformationsformeln I, II, $\text{III}^{(q)}$, $0 < q \overline{\gtrless} p$, ab. Die erste dieser Formeln wird dadurch erhalten, dass man in der Thetareihe an Stelle der p Summationsbuchstaben m durch eine lineare Substitution mit irgend welchen rationalen Zahlen als Coefficienten p neue Summationsbuchstaben n unter gleichzeitiger Einschiebung eines passend gewählten discontinuirlichen Factors einführt. Die zweite Formel, die wohl jedem, der sich mit der Transformationstheorie beschäftigt hat, bekannt ist, entsteht dadurch, dass man in der Thetareihe an Stelle der Parameter a neue Parameter b einführt, die sich von den ursprünglichen um ganze Vielfache von πi unterscheiden. Die dritte Formel endlich, die als die Verallgemeinerung einer zu-

erst von Jacobi*) für Thetafunctionen einer Variable aufgestellten fundamentalen Formel anzusehen ist, wird dadurch erhalten, dass man die p-fach unendliche Thetareihe durch Einschiebung eines gewissen den Werth 1 besitzenden Factors in eine $(p+q)$-fach unendliche Reihe verwandelt, bei dieser die Summationsordnung ändert und alsdann q der $p+q$ Summationen ausführt. Die directe Ableitung dieser dritten Formel gelang uns erst, nachdem Herr Prym die dem Falle $p=1$ entsprechende specielle Formel auf directem Wege gewonnen und einen strengen Beweis für die Zulässigkeit der erwähnten Änderung der Summationsordnung gefunden hatte. Die drei durch die Formeln I, II, $\text{III}^{(q)}$ dargestellten linearen Transformationen bezeichneten wir mit T_I, T_{II}, $T_{III^{(q)}}$ und nannten sie elementare lineare Transformationen.

Die weitere Aufgabe bestand nun vor allem darin, nachzuweisen, dass man jede lineare Transformation T aus Transformationen vom Typus T_I, T_{II}, T_{III} zusammensetzen könne, dann aber auch darin, für jede solche Transformation T die einfachste Art der Zusammensetzung zu finden. Zu dem Ende betrachteten wir zunächst diejenigen, von uns „singuläre" genannten, linearen Transformationen, bei denen die Transformationszahlen $\mathfrak{b}$ sämmtlich der Null gleich sind, und fanden, dass jede solche singuläre Transformation S sich aus drei, oder in speciellen Fällen aus weniger als drei Transformationen vom Typus T_I, T_{II} zusammensetzen lässt. Nachdem dieser einfachste Fall erledigt war, beschäftigten wir uns mit der Zusammensetzung der allgemeinen linearen Transformation aus elementaren, und es gelang uns, auch in diesem Falle die gestellte Aufgabe vollständig zu lösen. Es ergab sich nämlich, dass man jede nicht singuläre lineare Transformation T auf mannigfache Weise aus zwei singulären linearen Transformationen S', S'' und einer für die Transformation T charakteristischen Transformation $T_{III^{(q)}}$, der Gleichung $T = S'T_{III^{(q)}}S''$ entsprechend, zusammensetzen kann, und es zeigte sich zugleich, dass die sämmtlichen linearen Transformationen in $p+1$ streng geschiedene, den Typen S, $S'T_{III^{(1)}}S''$, $S'T_{III^{(2)}}S''$, $\ldots$, $S'T_{III^{(p)}}S''$ entsprechende Classen zerfallen, in dem Sinne, dass eine lineare Transformation nur einer dieser $p+1$ Classen angehören kann. Die Lösung der gestellten Aufgabe erforderte langwierige, mit zahlreichen Schwierigkeiten verknüpfte Untersuchungen. Die erhaltenen Resultate sind im 5. Abschnitte mitgetheilt.

Eine lineare Transformation kann man, wie schon vorher bemerkt wurde, auf mannigfache Weise aus elementaren Transformationen vom Typus T_I, T_{II}, T_{III} zusammensetzen, und es entspricht zugleich einer jeden solchen Zusammensetzung eine bestimmte Art der Zusammensetzung der zur Transformation T gehörigen Formel aus Formeln vom Typus I, II, III. Je einfacher aber die Zusammensetzung der Transformation T sich vollzieht, um so einfacher gestaltet sich auch die Zusammensetzung

*) Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum. Königsberg 1829, pag. 165, Formel 9. (Gesammelte Werke, Bd. 1, pag. 217, Formel 9) Man vergleiche auch die im Folgenden citirte Arbeit von Rosenhain, pag. 395—397.

der ihr entsprechenden Formel. Dieser Umstand war bei unseren soeben besprochenen Untersuchungen über die Zusammensetzung linearer Transformationen aus elementaren massgebend. Wir haben die verschiedensten Zusammensetzungen studirt und uns schliesslich für die im Texte mitgetheilten als die einfachsten entschieden. Die daraufhin erhaltenen allgemeinen Transformationsformeln erschienen aber zunächst nicht in conciser Form; dieselben enthielten vielmehr in den auf ihren rechten Seiten stehenden Summen Gruppen von Summanden, die zusammen die Summe Null hatten und die daher aus den Formeln ausgeschieden werden mussten, wenn diese in der einfachsten Gestalt erscheinen sollten. Erst nach mehrfachen Versuchen und nachdem ich insbesondere die bei der Zusammensetzung auftretenden Summen $G[\sigma]$, $H[\tau]$, die von ähnlicher Bauart sind, wie die sogenannten Gauss'schen Summen, einer eingehenden Untersuchung unterzogen hatte, gelang es mir, die Formeln von allen überflüssigen Summanden zu befreien und in die jetzt vorliegende endgültige Gestalt zu bringen. Der 6. Abschnitt enthält die so reducirten Formeln, vier an der Zahl; dieselben entsprechen den vier bei der linearen Transformation zum Zwecke der Formelbildung unterschiedenen Fällen. Die Zusammenfassung dieser vier Formeln in eine einzige Hauptformel und die Specialisirung dieser letzteren für den Fall ganzzahliger Transformationszahlen bilden den Abschluss der auf die linearen Transformationen sich beziehenden Untersuchungen.

Nachdem so das Problem der allgemeinen linearen Transformation der Thetafunctionen seine vollständige Erledigung gefunden hatte, konnte nun schliesslich auch das Problem der nicht linearen Transformation mit Erfolg behandelt und zu einem befriedigenden Abschlusse gebracht werden. Die allgemeine nicht lineare Transformation kann nämlich unmittelbar aus einer linearen Transformation von allgemeinem Charakter und zwei ganz speciellen nicht linearen Transformationen zusammengesetzt werden. Die der ersten dieser drei Transformationen entsprechende Formel ergiebt sich ohne Mühe aus der im 6. Abschnitte gewonnenen Hauptformel; die den beiden nicht linearen Transformationen entsprechenden speciellen Formeln dagegen sind schon im 4. Abschnitte des ersten Theiles abgeleitet worden, können aber auch, ohne Rücksicht auf die dort angestellten Untersuchungen, durch ein directes, wohl zuerst von Rosenhain *) angewendetes Verfahren erhalten werden. Diese drei Formeln, in passender Weise zusammengesetzt, lieferten die im 7. Abschnitte mitgetheilte Hauptformel für die nicht lineare Transformation und damit den Schlussstein für die ganze im zweiten Theile dieser Arbeit entwickelte Transformationstheorie.

Die vorstehenden Ausführungen werden den Leser über den Inhalt der vorliegenden Arbeit genügend orientirt haben. Es erübrigt nur noch, mit einigen Worten

*) Rosenhain, Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des fonctions ultra-elliptiques de la première classe. (Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institut national de France. Sciences math. et phys. t. XI, pag. 361)

auf die Bedeutung der entwickelten Theorie hinzuweisen. Da ist denn vor allem der einheitliche Charakter der angewendeten Methoden zu betonen; es liegt ihnen ausschliesslich das Princip der directen Umformung der Thetareihe zu Grunde. Nur durch consequentes Festhalten an diesem Principe konnte das vorgesteckte Ziel, die Theorie der Thetafunctionen auf naturgemässe Weise zu entwickeln, erreicht werden. Auf Grund der Untersuchungen des ersten Theiles stehen jetzt die Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus r^{teln} ganzer Zahlen gebildet sind, gleichberechtigt neben den bis jetzt fast ausschliesslich betrachteten Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus halben Zahlen gebildet sind. Die Untersuchungen des zweiten Theiles dagegen haben die Transformationstheorie von den bisher bestandenen Beschränkungen befreit und die endgültige Lösung der dahin gehörigen Grundprobleme gebracht. Im Übrigen glauben wir weniger auf die gewonnenen Resultate als auf den Umstand Gewicht legen zu sollen, dass unsere Untersuchungen der mathematischen Forschung ein neues, weites Arbeitsfeld eröffnen.

Von der Aufnahme, die dieser Auszug findet, wird es abhängen, ob wir später einmal unsere gesammten auf die Thetafunctionen sich beziehenden Arbeiten veröffentlichen.

Strassburg i. E., im Oktober 1891.

A. Krazer.

Inhalt.

Erster Theil.

Theorie der Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken.

Zweiter Theil.

Theorie der Transformation der Thetafunctionen.

Berichtigungen.

Seite 10, Z. 9 v. o. lese man „$\sum_{\mu} \sum_{\mu'} a_{\mu\mu'} x_{\mu} x_{\mu'}$“ statt „$\sum_{\mu} \sum_{\mu'} a_{\mu\mu'} x_{\mu} x_{\mu}$“,

Seite 13, Z. 6 v. u. lese man „$k^{(\varrho\sigma)} = \varepsilon^{(\sigma)} \frac{2\lambda^{(\varrho\sigma)}}{Lq^{(\varrho)}}$“ statt „$k^{(\varrho\sigma)} = \varepsilon^{(\varrho)} \frac{2\lambda^{(\varrho\sigma)}}{Lq^{(\varrho)}}$“,

Seite 17, Z. 10 v. u. lese man „$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} a_{\mu\mu'}^{(\varrho)} c_{\mu}^{(\varrho\sigma)} c_{\mu'}^{(\varrho\sigma')}$“ statt „$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} \alpha_{\mu\mu'}^{(\varrho)} c_{\mu}^{(\varrho\sigma)} c_{\mu'}^{(\varrho\sigma')}$“,

Seite 19 ist in der Formel (F_2) unter dem ersten Σ der Buchstabe α ausgefallen,

Seite 71, Z. 6 v. u. lese man „mit s', so geht“ statt „mit s, so geht“,

Seite 86, Z. 5 v. u. lese man „$\mathfrak{c}_{11} = \mathfrak{c}_{22} = \cdots = \mathfrak{c}_{qq}$“ statt „$\mathfrak{c}_{11} = \mathfrak{c}_{22} = \cdots = \mathfrak{c}_{pp}$“,

Seite 109, Z. 2 v. o. lese man „$(rs\overline{\Delta}_{\beta})^{2p}$“ statt „$(rs\overline{\Delta}_{p})^{2p}$“,

Seite 110, Z. 14 v. o. lese man „$=$“ statt „$\asymp$“,

Seite 123, Z. 4 v. u. lese man „Abschnitte“ statt „Artikel“.

Erster Theil.

Theorie der Thetafunctionen

mit

rationalen Charakteristiken.

Erster Abschnitt.

Über die Convergenz der Thetareihe. — Einige Definitionen, Formeln und Sätze über Thetafunctionen.

1.

Unter einer p-fach unendlichen Thetareihe versteht man eine p-fach unendliche Reihe, bei welcher der Logarithmus des allgemeinen Gliedes eine ganze rationale Function zweiten Grades der p Summationsbuchstaben ist. Eine solche Reihe kann, wenn man die Summationsbuchstaben mit $m_1, m_2, \ldots, m_p$ bezeichnet, immer in die Form:

$$\sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} b_\mu m_\mu + c}$$

gebracht werden, bei der die $\frac{1}{2}p(p+1)$ Grössen $a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$, die p Grössen b_μ und die Grösse c von $m_1, m_2, \ldots, m_p$ unabhängig sind.

Die erste Frage ist die, welche Bedingungen die Grössen a, b, c erfüllen müssen, damit die aufgestellte Reihe absolut convergire. Bezeichnet man aber den reellen Theil von $a_{\mu\mu'}$ mit $r_{\mu\mu'}$, so ergibt sich sofort als nothwendige Bedingung für die absolute Convergenz der Thetareihe die, dass der Werth des Ausdruckes:

$$R = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} r_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'}$$

stets gegen $-\infty$ gehe, wenn irgend welche der p ganzen Zahlen m ihren absoluten Werthen nach über alle Grenzen wachsen, und es lässt sich weiter an der Hand der dann immer bestehenden Darstellung von R:

$$\begin{aligned} R = r_{11}^{(1)} \left(m_1 + \frac{r_{12}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}} m_2 + \frac{r_{13}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}} m_3 + \cdots + \frac{r_{1p}^{(1)}}{r_{11}^{(1)}} m_p \right)^2 \\ + \frac{r_{22}^{(2)}}{r_{11}^{(1)}} \left(m_2 + \frac{r_{23}^{(2)}}{r_{22}^{(2)}} m_3 + \cdots + \frac{r_{2p}^{(2)}}{r_{22}^{(2)}} m_p \right)^2 \\ + \cdots\cdots\cdots \\ + \frac{r_{pp}^{(p)}}{r_{p-1\,p-1}^{(p-1)}} (m_p)^2 \end{aligned}$$

zeigen, dass diese als nothwendig erkannte Bedingung für die absolute Convergenz der

Thetareihe auch hinreichend ist; in dieser Gleichung bezeichnet allgemein $r^{(\nu)}_{\varrho\sigma}$ die Determinante:

$$r^{(\nu)}_{\varrho\sigma} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1\,\nu-1} & r_{1\sigma} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2\,\nu-1} & r_{2\sigma} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{\nu-1\,1} & r_{\nu-1\,2} & \cdots & r_{\nu-1\,\nu-1} & r_{\nu-1\,\sigma} \\ r_{\varrho 1} & r_{\varrho 2} & \cdots & r_{\varrho\,\nu-1} & r_{\varrho\sigma} \end{vmatrix}$$

wobei ν, ϱ, σ Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ bezeichnen, die auch theilweise oder sämmtlich einander gleich sein können, und der Fall $\nu = 1$ in der Weise aufzufassen ist, dass die Determinante $r^{(\nu)}_{\varrho\sigma}$ sich alsdann auf das einzige Element $r_{\varrho\sigma}$ reducirt.

Die angeschriebene Darstellung von R zeigt aber weiter, dass die für die Form R gefundene, zur absoluten Convergenz der p-fach unendlichen Thetareihe nothwendige und hinreichende Bedingung durch das System der p Bedingungen:

$$r^{(1)}_{11} < 0, \quad \frac{r^{(2)}_{22}}{r^{(1)}_{11}} < 0, \quad \frac{r^{(3)}_{33}}{r^{(2)}_{22}} < 0, \quad \ldots, \quad \frac{r^{(p)}_{pp}}{r^{(p-1)}_{p-1\,p-1}} < 0,$$

und dieses endlich durch die Bedingung, dass die quadratische Form R eine negative Form sei, ersetzt werden kann.

2.

Unter der Voraussetzung, dass für reelle x der reelle Theil der Form:

$$A = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} x_\mu x_{\mu'}$$

eine negative quadratische Form ist, kann die Form A, unter Anwendung einer der früheren analogen Bezeichnung, gemäss der Gleichung:

$$\begin{aligned} A = a^{(1)}_{11} & \left(x_1 + \frac{a^{(1)}_{12}}{a^{(1)}_{11}} x_2 + \frac{a^{(1)}_{13}}{a^{(1)}_{11}} x_3 + \cdots + \frac{a^{(1)}_{1p}}{a^{(1)}_{11}} x_p \right)^2 \\ & + \frac{a^{(2)}_{22}}{a^{(1)}_{11}} \left(x_2 + \frac{a^{(2)}_{23}}{a^{(2)}_{22}} x_3 + \cdots + \frac{a^{(2)}_{2p}}{a^{(2)}_{22}} x_p \right)^2 \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{a^{(p)}_{pp}}{a^{(p-1)}_{p-1\,p-1}} (x_p)^2 \end{aligned}$$

als Summe von p Quadraten linearer Functionen der x dargestellt werden, und man erkennt zugleich, dass die reellen Theile der p Grössen:

$$a^{(1)}_{11}, \quad \frac{a^{(2)}_{22}}{a^{(1)}_{11}}, \quad \frac{a^{(3)}_{33}}{a^{(2)}_{22}}, \quad \ldots, \quad \frac{a^{(p)}_{pp}}{a^{(p-1)}_{p-1\,p-1}}.$$

sämmtlich negative Werthe haben. Die Determinante $a^{(p)}_{pp}$ ist mit der Determinante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{pp}$ der quadratischen Form A identisch, und es folgt daher auch, dass diese Determinante stets einen von Null verschiedenen Werth besitzt.

3.

Man gehe jetzt auf die in Art. 1 aufgestellte allgemeine Thetareihe zurück, nehme an, dass die reellen Theile der in ihr vorkommenden Grössen a die angegebenen für die absolute Convergenz der Reihe nothwendigen und hinreichenden Bedingungen erfüllen, und betrachte die Grössen b als unabhängige complexe Veränderliche. Der Werth der Reihe soll als Function dieser Veränderlichen aufgefasst und, nachdem man noch statt des Buchstabens b den Buchstaben w gewählt, die Grösse c aber gleich Null gesetzt hat, mit $\vartheta(w_1 \mid w_2 \mid \ldots \mid w_p)$ bezeichnet werden, sodass also:

$$\vartheta(w_1 \mid w_2 \mid \ldots \mid w_p) = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu w_\mu}$$

ist. Die Function $\vartheta(w_1 \mid w_2 \mid \ldots \mid w_p)$ ist dann eine einwerthige und für alle endlichen w auch stetige Function der complexen Veränderlichen $w_1, w_2, \ldots, w_p$, welche den Gleichungen:

$$(1_0) \qquad \vartheta(w_1 \mid \ldots \mid w_\nu + \pi i \mid \ldots \mid w_p) = \vartheta(w_1 \mid \ldots \mid w_\nu \mid \ldots \mid w_p),$$
$$(2_0) \qquad \vartheta(w_1 + a_{1\nu} \mid \ldots \mid w_p + a_{p\nu}) = \vartheta(w_1 \mid \ldots \mid w_p)\, e^{-2w_\nu - a_{\nu\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

genügt.

In die in Art. 1 aufgestellte p-fach unendliche Thetareihe führe man weiter an Stelle der Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_p$ die Grössen $w_1 + c_1, w_2 + c_2, \ldots, w_p + c_p$ ein, indem man unter $w_1, w_2, \ldots, w_p$ wieder unabhängige complexe Veränderliche, unter $c_1, c_2, \ldots, c_p$ willkürliche complexe Constanten versteht. Bringt man dann, was immer und nur auf eine Weise möglich ist, dieses Constantensystem mit Hülfe reeller Grössen g, h in die Gestalt:

$$h_1 \pi i + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{1\mu} \mid h_2 \pi i + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{2\mu} \mid \ldots \mid h_p \pi i + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{p\mu}$$

und setzt gleichzeitig:

$$c = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g_\mu g_{\mu'} + 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu (w_\mu + h_\mu \pi i),$$

so entsteht die allgemeinere Function:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{bmatrix} (w_1 \mid \ldots \mid w_p)$$
$$= \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} (m_\mu + g_\mu)(m_{\mu'} + g_{\mu'}) + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} (m_\mu + g_\mu)(w_\mu + h_\mu \pi i)},$$

welche ihrer Entstehung gemäss mit der vorher gewonnenen einfacheren Function $\vartheta(w_1 \mid \ldots \mid w_p)$ durch die Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \ldots g_p \\ h_1 \ldots h_p \end{bmatrix} (w_1 \mid \ldots \mid w_p) = \vartheta(w_1 + h_1 \pi i + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{1\mu} \mid \ldots \mid w_p + h_p \pi i + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{p\mu})$$
$$\times e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g_\mu g_{\mu'} + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu (w_\mu + h_\mu \pi i)}$$

verknüpft ist und in dieselbe übergeht, wenn die Grössen g, h sämmtlich den Werth Null annehmen. Jede Function von der Form $\vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p)$ soll eine Thetafunction genannt werden. Entsprechend den Gleichungen (1_0), (2_0) bestehen für sie die Gleichungen:

$$(1) \quad \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_\nu + \pi i | \dots | w_p) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_\nu | \dots | w_p)\, e^{2 g_\nu \pi i},$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, p)$$

$$(2) \quad \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 + a_{1\nu} | \dots | w_p + a_{p\nu}) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p)\, e^{-2 w_\nu - a_{\nu\nu} - 2 h_\nu \pi i}.$$

Das Symbol $\begin{bmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{bmatrix}$ möge die Charakteristik der Thetafunction heissen und, wenn kein Missverständniss zu befürchten ist, kürzer mit $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ bezeichnet werden. Die Charakteristik $\begin{bmatrix} g+g' \\ h+h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + g_1' \dots g_p + g_p' \\ h_1 + h_1' \dots h_p + h_p' \end{bmatrix}$ möge die Summe, die Charakteristik $\begin{bmatrix} g-g' \\ h-h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - g_1' \dots g_p - g_p' \\ h_1 - h_1' \dots h_p - h_p' \end{bmatrix}$ die Differenz der Charakteristiken $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}$ genannt werden. Eine Charakteristik, deren Elemente für $\nu = 1, 2, \dots, p$ den Bedingungen $0 \leqq g_\nu < 1$, $0 \leqq h_\nu < 1$ genügen, möge eine Normalcharakteristik genannt werden. Zwei Charakteristiken $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}$ sollen congruent genannt werden, wenn ihre entsprechenden Elemente sich nur um ganze Zahlen unterscheiden; im anderen Falle mögen sie incongruent heissen. Eine Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p)$, deren Charakteristik eine Normalcharakteristik ist, möge eine Normalfunction genannt werden. Zwei Functionen $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p)$ und $\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p)$ sollen nicht wesentlich verschieden genannt werden, wenn ihre Charakteristiken einander congruent sind; im anderen Falle mögen sie wesentlich verschieden heissen.

Die p Grössen $w_1, w_2, \dots, w_p$ sollen die Argumente, die $\frac{1}{2}p(p+1)$ Grössen $a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$ die Parameter der Thetafunction genannt werden. In den Fällen, wo die Ausdrücke für die Argumente einer Thetafunction sich nur durch untere Indices unterscheiden, möge es erlaubt sein, hinter dem Functionszeichen nur den allgemeinen Ausdruck für die Argumente mit Weglassung des Index in doppelte Klammern eingeschlossen zu schreiben, also $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((w))$ statt $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(w_1 | \dots | w_p)$; im Anschlusse daran möge dann das Grössensystem $w_1 | \dots | w_p$ einfacher mit (w), ein System $w_1 + k_1 | \dots | w_p + k_p$ mit $(w+k)$, und endlich noch ein System von der Form:

$$w_1 + h_1 \pi i + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{1\mu} \,|\, \cdots \,|\, w_p + h_p \pi i + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu a_{p\mu},$$

wenn es das Argumentensystem einer Thetafunction mit den Parametern a bildet, symbolisch mit $\left(w + \left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|\right)$ bezeichnet werden. Das Vorhandensein der Parameter a soll nur dann bei der Bezeichnung der Function und zwar in der Form $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((w))_a$ zum Ausdruck gebracht werden, wenn gleichzeitig Functionen mit verschiedenen Parametersystemen betrachtet werden.

Es sollen noch einige Formeln aufgestellt werden, die im weiteren Verlaufe der Arbeit als Hülfsformeln wiederholt zur Anwendung kommen. Zu dem Ende mögen unter $g'_1, \ldots, g'_p, h'_1, \ldots, h'_p$ irgend welche reelle Constanten, unter $\varphi_1, \ldots, \varphi_p, \psi_1, \ldots, \psi_p$ dagegen irgend welche ganze Zahlen verstanden werden; es bestehen dann die Formeln:

$$(A)\quad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(\!\!\left(w + \left| \begin{matrix} g' \\ h' \end{matrix} \right| \right)\!\!\right) = \vartheta\begin{bmatrix} g+g' \\ h+h' \end{bmatrix}(\!(w)\!)\, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} g'_\mu g'_{\mu'} - 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g'_\mu (w_\mu + h_\mu \pi i + h'_\mu \pi i)},$$

$$(B)\quad \vartheta\begin{bmatrix} g_1+\varphi_1 \cdots g_p+\varphi_p \\ h_1+\psi_1 \cdots h_p+\psi_p \end{bmatrix}(\!(w)\!) = \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{bmatrix}(\!(w)\!)\, e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \psi_\mu g_\mu \pi i},$$

$$(C)\quad \vartheta\begin{bmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{bmatrix}(\!(-w)\!) = \vartheta\begin{bmatrix} -g_1 \cdots -g_p \\ -h_1 \cdots -h_p \end{bmatrix}(\!(w)\!),$$

$$(D)\quad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}\left(\!\!\left(w + \left| \begin{matrix} \varphi \\ \psi \end{matrix} \right| \right)\!\!\right) = \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(w)\!)\, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \varphi_\mu \varphi_{\mu'} - 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \varphi_\mu w_\mu + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} (\psi_\mu g_\mu - \varphi_\mu h_\mu)\pi i}.$$

Die früher aufgestellten Gleichungen (1), (2) sind als specielle Fälle in der Formel (D) enthalten.

4.

Es sollen jetzt speciell Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken, d. h. solche, deren Charakteristiken nur rationale Zahlen als Elemente enthalten, betrachtet werden. Eine Thetafunction mit rationaler Charakteristik kann stets in die Form:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1}{r} \cdots \frac{\varepsilon_p}{r} \\ \frac{\varepsilon'_1}{r} \cdots \frac{\varepsilon'_p}{r} \end{bmatrix}(w_1 \mid \ldots \mid w_p)$$

gebracht werden, wobei r eine positive ganze Zahl, die ε, ε' irgend welche ganze Zahlen bezeichnen. Diese Function soll eine zur Zahl r gehörige Thetafunction genannt, und von allen diesen Thetafunctionen soll gesagt werden, dass sie die zur Zahl r gehörige Gruppe von Thetafunctionen bilden; in dieser Gruppe kommen r^{2p} Normalfunctionen vor, und jede andere Function der Gruppe ist von einer dieser r^{2p} Normalfunctionen nicht wesentlich verschieden. Die Charakteristik $\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon}{r} \\ \frac{\varepsilon'}{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1}{r} \cdots \frac{\varepsilon_p}{r} \\ \frac{\varepsilon'_1}{r} \cdots \frac{\varepsilon'_p}{r} \end{bmatrix}$ soll, wenn dadurch kein Missverständniss zu befürchten ist, zur Abkürzung mit $\left[\frac{\varepsilon}{r}\right]$ und entsprechend die zugehörige Thetafunction mit $\vartheta\left[\frac{\varepsilon}{r}\right](\!(w)\!)$ bezeichnet werden.

Die r^{2p} zur Zahl r gehörigen Normalfunctionen sind stets linear unabhängig, d. h. es kann zwischen ihnen, so lange die w den Charakter unabhängiger Veränderlichen haben, niemals eine Relation von der Form:

$$\sum_{\substack{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_p}}^{0, 1, \ldots, r-1} C^{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p}_{\varepsilon'_1 \cdots \varepsilon'_p}\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1}{r} \cdots \frac{\varepsilon_p}{r} \\ \frac{\varepsilon'_1}{r} \cdots \frac{\varepsilon'_p}{r} \end{bmatrix}(\!(w)\!) = 0$$

bestehen, bei der die r^{2p} Buchstaben $C_{\varepsilon_1' \ldots \varepsilon_p'}^{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_p}$ von $w_1, \ldots, w_p$ unabhängige Grössen bezeichnen, die nicht alle den Werth Null besitzen.

Der Quotient irgend zweier zur Zahl r gehörigen Thetafunctionen soll ein zur Zahl r gehöriger Thetaquotient genannt, und von allen diesen Quotienten soll gesagt werden, dass sie die zur Zahl r gehörige Gruppe von Thetaquotienten bilden. Ein jeder solcher zur Zahl r gehöriger Thetaquotient:

$$Q_r(w_1 | \cdots | w_p) = \frac{\vartheta\left[\frac{\varepsilon}{r}\right](w_1 | \cdots | w_p)}{\vartheta\left[\frac{\eta}{r}\right](w_1 | \cdots | w_p)}$$

genügt den Gleichungen:

$$\begin{aligned} Q_r(w_1 | \cdots | w_\nu + r\pi i | \cdots | w_p) &= Q_r(w_1 | \cdots | w_\nu | \cdots | w_p), \\ Q_r(w_1 + ra_{1\nu} | \cdots | w_p + ra_{p\nu}) &= Q_r(w_1 | \cdots | w_p) \end{aligned} \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \cdots, p)}$$

und ist also eine $2p$-fach periodische Function der complexen Veränderlichen $w_1 | w_2 | \ldots | w_p$, welche die $2p$ Grössensysteme:

$$\begin{array}{llll} r\pi i \,|\, 0 \,|\, \ldots \,|\, 0\,, & & & ra_{11} \,|\, ra_{21} \,|\, \ldots \,|\, ra_{p1}\,, \\ 0 \,|\, r\pi i \,|\, \ldots \,|\, 0\,, & & & ra_{12} \,|\, ra_{22} \,|\, \ldots \,|\, ra_{p2}\,, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 \,|\, 0 \,|\, \ldots \,|\, r\pi i, & & & ra_{1p} \,|\, ra_{2p} \,|\, \ldots \,|\, ra_{pp} \end{array}$$

als Periodensysteme besitzt. Ist umgekehrt der aus irgend zwei Thetafunctionen gebildete Quotient $Q(w_1 | \ldots | w_p)$ eine $2p$-fach periodische Function der complexen Veränderlichen $w_1, \ldots, w_p$, welche die soeben angeschriebenen $2p$ Grössensysteme als Periodensysteme besitzt, so kann man die Function $Q(w_1 | \ldots | w_p)$ von einem constanten Factor abgesehen immer durch Einführung passend gewählter neuen Veränderlichen $\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_p$ in eine Function $Q_r(\overline{w}_1 | \ldots | \overline{w}_p)$ der vorher betrachteten Art verwandeln. Man erkennt daraus, dass die Bedingung der Periodicität, sobald man sie für den Quotienten irgend zweier Thetafunctionen stellt, mit Nothwendigkeit auf Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken führt, und weiter auch, dass die Eintheilung dieser letzteren Functionen in Gruppen, wie sie oben gemacht wurde, eine wohlberechtigte ist, da allen aus je zwei Thetafunctionen einer Gruppe gebildeten Quotienten die nämlichen, der betreffenden Gruppe eigenthümlichen $2p$ Periodensysteme zukommen. Die $r^{2p} - 1$ speciellen zur Zahl r gehörigen Thetaquotienten, welche entstehen, wenn man die von $\vartheta[0]((w))$ verschiedenen $r^{2p} - 1$ zur Zahl r gehörigen Normalfunctionen durch $\vartheta[0]((w))$ theilt, sollen die zur Zahl r gehörigen Normalquotienten genannt werden. Bei der Untersuchung der zur Zahl r gehörigen Thetafunctionen und Thetaquotienten wird man sich auf die Betrachtung der r^{2p} Normalfunctionen und $r^{2p} - 1$ Normalquotienten als Grundfunctionen beschränken.

Die in den weiteren Abschnitten dieses ersten Theiles durchzuführenden Untersuchungen beziehen sich ausschliesslich auf Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken. Der Zweck dieser Untersuchungen ist die Aufdeckung der zwischen den genannten Functionen bestehenden Beziehungen.

Zweiter Abschnitt.

Algebraische Untersuchungen.

1.

Die am Ende des vorigen Artikels erwähnten Beziehungen zwischen Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken gelangen durch Formeln zum Ausdrucke, die sämmtlich aus einer einzigen Fundamentalformel abgeleitet werden können. Um eine Grundlage für die Herstellung dieser Fundamentalformel zu gewinnen, empfiehlt es sich, zuvor die nachstehende algebraische Untersuchung anzustellen.

Gegeben seien die beiden quadratischen Formen:

$$A = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} (a^{(1)}_{\mu\mu'} x^{(1)}_{\mu} x^{(1)}_{\mu'} + a^{(2)}_{\mu\mu'} x^{(2)}_{\mu} x^{(2)}_{\mu'} + \cdots + a^{(n)}_{\mu\mu'} x^{(n)}_{\mu} x^{(n)}_{\mu'}),$$

$$B = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} (b^{(1)}_{\mu\mu'} y^{(1)}_{\mu} y^{(1)}_{\mu'} + b^{(2)}_{\mu\mu'} y^{(2)}_{\mu} y^{(2)}_{\mu'} + \cdots + b^{(n)}_{\mu\mu'} y^{(n)}_{\mu} y^{(n)}_{\mu'});$$

dabei seien die np Veränderlichen x ebenso wie die np Veränderlichen y von einander unabhängig, es seien ferner die Grössen $a^{(\varrho)}_{\mu\mu'} = a^{(\varrho)}_{\mu'\mu}$ sämmtlich von Null verschieden und ausserdem so beschaffen, dass für reelle x der reelle Theil der Form A eine negative quadratische Form ist, es seien dagegen die Grössen $b^{(\varrho)}_{\mu\mu'} = b^{(\varrho)}_{\mu'\mu}$ zunächst keinen Bedingungen unterworfen. Man stelle die Frage, welchen Bedingungen die Grössen a, b noch genügen müssen, damit die Form A in die Form B übergeführt werden könne durch eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante von der Form:

$$(S)\qquad \left.\begin{aligned} x^{(1)}_{\mu} &= r^{(11)}_{\mu} y^{(1)}_{\mu} + r^{(12)}_{\mu} y^{(2)}_{\mu} + \cdots + r^{(1n)}_{\mu} y^{(n)}_{\mu}, \\ x^{(2)}_{\mu} &= r^{(21)}_{\mu} y^{(1)}_{\mu} + r^{(22)}_{\mu} y^{(2)}_{\mu} + \cdots + r^{(2n)}_{\mu} y^{(n)}_{\mu}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(n)}_{\mu} &= r^{(n1)}_{\mu} y^{(1)}_{\mu} + r^{(n2)}_{\mu} y^{(2)}_{\mu} + \cdots + r^{(nn)}_{\mu} y^{(n)}_{\mu}, \end{aligned}\right\} (S_\mu)$$
$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

deren Coefficienten r sämmtlich rationale Zahlen sind, und deren Systeme $(S_1), (S_2), \ldots, (S_p)$ nicht zerfallen; dabei wird ein System (S_μ) ein zerfallendes genannt, wenn in Folge des Verschwindens gewisser seiner Coefficienten $r^{(\varrho\sigma)}_{\mu}$ m der n Grössen $y^{(1)}_{\mu}, y^{(2)}_{\mu}, \ldots, y^{(n)}_{\mu}$ nur

in m der n Gleichungen des Systems (S_μ) vorkommen, und zugleich diese m Gleichungen keine der $n-m$ übrigen Grössen y enthalten.

Als nothwendige und hinreichende Bedingung für die Möglichkeit dieser Überführung findet man, dass die Coefficienten a, b der Formen A, B sich in die durch die Gleichungen:

$$a^{(\varrho)}_{\mu\mu'} = p^{(\varrho)} f^{(\varrho)}_{\mu} f^{(\varrho)}_{\mu'} a_{\mu\mu'}, \qquad b^{(\sigma)}_{\mu\mu'} = q^{(\sigma)} g^{(\sigma)}_{\mu} g^{(\sigma)}_{\mu'} a_{\mu\mu'} \qquad \binom{\varrho,\,\sigma=1,\,2,\,\ldots,\,n}{\mu,\,\mu'=1,\,2,\,\ldots,\,p}$$

bestimmte Gestalt bringen lassen, wobei die $a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$ Grössen bezeichnen, die sämmtlich von Null verschieden und ausserdem so beschaffen sind, dass für reelle x der reelle Theil der Form $\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} a_{\mu\mu'} x_\mu x_\mu$ eine negative quadratische Form ist, wobei ferner die f, g von Null verschiedene, im Übrigen aber keinen Bedingungen unterworfene rationale Zahlen sind, und wobei endlich die p, q positive rationale Zahlen von der Beschaffenheit bezeichnen, dass für die mit ihnen als Coefficienten gebildeten Formen:

$$P = p^{(1)} x^{(1)^2} + p^{(2)} x^{(2)^2} + \cdots + p^{(n)} x^{(n)^2},$$
$$Q = q^{(1)} y^{(1)^2} + q^{(2)} y^{(2)^2} + \cdots + q^{(n)} y^{(n)^2}$$

eine nicht zerfallende lineare Substitution von der Form:

$$(T) \qquad \begin{aligned} x^{(1)} &= t^{(11)} y^{(1)} + t^{(12)} y^{(2)} + \cdots + t^{(1n)} y^{(n)}, \\ x^{(2)} &= t^{(21)} y^{(1)} + t^{(22)} y^{(2)} + \cdots + t^{(2n)} y^{(n)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{(n)} &= t^{(n1)} y^{(1)} + t^{(n2)} y^{(2)} + \cdots + t^{(nn)} y^{(n)}, \end{aligned}$$

deren Coefficienten sämmtlich rationale Zahlen sind, existirt, welche die Form P in die Form Q überführt.

Erfüllen die Coefficienten a, b die angegebenen Bedingungen, so entspricht zugleich jedem solchen Systeme von n^2 rationalen Zahlen t eine in ihren Coefficienten r durch die Gleichungen:

$$r^{(\varrho\sigma)}_{\mu} = \frac{g^{(\sigma)}_{\mu}}{f^{(\varrho)}_{\mu}} t^{(\varrho\sigma)} \qquad \binom{\varrho,\,\sigma=1,\,2,\,\ldots,\,n}{\mu\;=1,\,2,\,\ldots,\,p}$$

bestimmte, in ihren partiellen Gleichungensystemen (S_1), (S_2), …, (S_p) nicht zerfallende Substitution (S) mit rationalen Zahlen als Coefficienten und nicht verschwindender Determinante, welche die Form A in die Form B überführt, und es umfasst die Gesammtheit der auf diese Weise construirbaren Substitutionen (S) alle überhaupt existirenden Substitutionen der angegebenen Art, welche die Form A in die Form B überführen.

Man wird hier noch bemerken, dass die in der angegebenen Weise gebildeten Substitutionen (S), insofern als ihre Coefficienten von den Grössen $a_{\mu\mu'}$ vollständig unabhängig sind, die Überführung der Form A in die Form B auch dann noch bewirken, wenn man bei den in A und B vorkommenden Grössen $a_{\mu\mu'}$ von den oben gestellten Bedingungen absieht.

2.

Auf Grund des im vorigen Artikel Gefundenen reducirt sich die Aufgabe, alle den gemachten Voraussetzungen entsprechenden Formenpaare A, B, welche so beschaffen sind, dass die Form A sich durch eine Substitution (S) von der angegebenen Art in die Form B überführen lässt, zu bestimmen und zugleich für jedes solche Formenpaar alle Substitutionen (S) der angeführten Art, welche diese Überführung bewirken, anzugeben, auf die einfachere, alle mit positiven rationalen Zahlen p, q als Coefficienten gebildeten Formenpaare P, Q, welche so beschaffen sind, dass die Form P sich durch eine nicht zerfallende lineare Substitution (T), deren Coefficienten t sämmtlich rationale Zahlen sind, in die Form Q überführen lässt, zu bestimmen und zugleich für jedes solche Formenpaar P, Q alle Substitutionen (T) der angeführten Art, welche diese Überführung bewirken, anzugeben. Diese Aufgabe soll jetzt behandelt werden. Dabei nehme man an, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit geschehen kann, dass die Form P eine willkürlich gewählte sei. Die vorher gestellte Aufgabe kommt dann darauf hinaus, zu der willkürlich gewählten Form P alle nicht zerfallenden Substitutionen T zu finden, welche die Form P in Formen Q überführen.

Man kann zunächst eine specielle Substitution:

$$(\mathrm{T})\quad \begin{aligned}
x^{(1)} &= \phantom{-s^{(1)}y^{(1)}+{}} p^{(2)}y^{(1)} + p^{(3)}y^{(2)} + p^{(4)}y^{(3)} + \cdots + p^{(n-1)}y^{(n-2)} + p^{(n)}y^{(n-1)} + y^{(n)},\\
x^{(2)} &= -s^{(1)}y^{(1)} + p^{(3)}y^{(2)} + p^{(4)}y^{(3)} + \cdots + p^{(n-1)}y^{(n-2)} + p^{(n)}y^{(n-1)} + y^{(n)},\\
x^{(3)} &= -s^{(2)}y^{(2)} + p^{(4)}y^{(3)} + \cdots + p^{(n-1)}y^{(n-2)} + p^{(n)}y^{(n-1)} + y^{(n)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^{(n-1)} &= -s^{(n-2)}y^{(n-2)} + p^{(n)}y^{(n-1)} + y^{(n)},\\
x^{(n)} &= -s^{(n-1)}y^{(n-1)} + y^{(n)},
\end{aligned}$$

wobei für $\nu = 1, 2, \ldots, n$:

$$p^{(1)} + p^{(2)} + \cdots + p^{(\nu)} = s^{(\nu)}$$

gesetzt ist, angeben, durch deren Anwendung die Form:

$$P = p^{(1)}x^{(1)^2} + p^{(2)}x^{(2)^2} + \cdots + p^{(n)}x^{(n)^2}$$

in eine Form Q, nämlich in die Form:

$$Q = s^{(1)}s^{(2)}p^{(2)}y^{(1)^2} + s^{(2)}s^{(3)}p^{(3)}y^{(2)^2} + \cdots + s^{(n-1)}s^{(n)}p^{(n)}y^{(n-1)^2} + s^{(n)}y^{(n)^2}$$

übergeht, und sodann aus dieser Substitution die allgemeinere:

$$(\overline{\mathrm{T}})\quad \begin{aligned}
x^{(1)} &= t^{(1)}t^{(2)}p^{(2)}y^{(1)} + t^{(1)}t^{(3)}p^{(3)}y^{(2)} + \cdots + t^{(1)}t^{(n)}p^{(n)}y^{(n-1)} + t^{(1)}y^{(n)},\\
x^{(2)} &= -\bar{s}^{(1)}y^{(1)} + t^{(2)}t^{(3)}p^{(3)}y^{(2)} + \cdots + t^{(2)}t^{(n)}p^{(n)}y^{(n-1)} + t^{(2)}y^{(n)},\\
x^{(3)} &= -\bar{s}^{(2)}y^{(2)} + \cdots + t^{(3)}t^{(n)}p^{(n)}y^{(n-1)} + t^{(3)}y^{(n)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^{(n)} &= -\bar{s}^{(n-1)}y^{(n-1)} + t^{(n)}y^{(n)}
\end{aligned}$$

ableiten, in der für $\nu = 1, 2, \ldots, n$:

$$p^{(1)}t^{(1)^2} + p^{(2)}t^{(2)^2} + \cdots + p^{(\nu)}t^{(\nu)^2} = \bar{s}^{(\nu)}$$

gesetzt ist, und durch welche die Form P in die Form:

$$Q = \bar{s}^{(1)}\bar{s}^{(2)}p^{(2)}y^{(1)^2} + \bar{s}^{(2)}\bar{s}^{(3)}p^{(3)}y^{(2)^2} + \cdots + \bar{s}^{(n-1)}\bar{s}^{(n)}p^{(n)}y^{(n-1)^2} + \bar{s}^{(n)}y^{(n)^2}$$

übergeführt wird. Bei dieser Substitution $(\overline{\mathrm{T}})$ sollen $t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(n)}$ von Null verschiedene rationale Zahlen bezeichnen; man wird aber bemerken, dass das Gleichungensystem $(\overline{\mathrm{T}})$ auch dann noch eine, wenn auch zerfallende, Substitution, welche die Form P in eine Form Q überführt, darstellt, wenn man die Grössen $t^{(2)}, t^{(3)}, \ldots, t^{(n)}$ theilweise oder auch insgesammt der Null gleich setzt, für $t^{(1)}$ dagegen die gemachte Voraussetzung aufrecht hält. Setzt man dagegen $t^{(1)} = 0$, oder, um sogleich den allgemeinsten Fall einzuschliessen, $t^{(1)} = t^{(2)} = \ldots = t^{(\nu)} = 0$, während $t^{(\nu+1)}$ von Null verschieden sein soll, so verliert das Gleichungensystem $(\overline{\mathrm{T}})$ seinen ursprünglichen Charakter, da in diesem Falle die ersten ν Gleichungen desselben in $x^{(1)} = 0$, $x^{(2)} = 0$, $\ldots$, $x^{(\nu)} = 0$ übergehen. Entfernt man aber dann diese ν Gleichungen aus dem Gleichungensysteme $(\overline{\mathrm{T}})$ und setzt an ihre Stelle die Gleichungen $x^{(1)} = y^{(1)}$, $x^{(2)} = y^{(2)}$ $\ldots$, $x^{(\nu)} = y^{(\nu)}$, so stellen diese zusammen mit den $n - \nu$ noch übrigen Gleichungen des in der angegebenen Weise specialisirten Systems $(\overline{\mathrm{T}})$ eine zerfallende Substitution $(\overline{\mathrm{T}}_0)$ dar, welche die Form P in eine Form Q überführt, und welche im Folgenden als der den Werthen $t^{(1)} = t^{(2)} = \ldots = t^{(\nu)} = 0$, $t^{(\nu+1)} \neq 0$ entsprechende specielle Fall der Substitution $(\overline{\mathrm{T}})$ angesehen werden soll.

Die gewonnene Substitution $(\overline{\mathrm{T}})$, die im Folgenden, insofern sie zur Zahl n gehört, mit $(\overline{\mathrm{T}}^{(n)})$ bezeichnet werden soll, ist von besonderer Wichtigkeit. Man kann nämlich eine jede Substitution $(T^{(n)})$, welche die Form P in eine Form Q überführt, in der Form $(T^{(n)}) = (\overline{\mathrm{T}}^{(n)})(T'^{(n)})$ zusammensetzen aus einer in ihren Parametern t passend bestimmten Substitution $(\overline{\mathrm{T}}^{(n)})$ und einer Substitution $(T'^{(n)})$, welche aus der Gleichung $x^{(n)} = y^{(n)}$ und einem die Grösse $y^{(n)}$ nicht mehr enthaltenden Systeme von $n - 1$ Gleichungen besteht, das, für sich betrachtet, eine zur Zahl $n - 1$ gehörige Substitution $(T^{(n-1)})$ bildet. Ist dies geschehen, so kann man in derselben Weise die Substitution $(T^{(n-1)})$ in der Form $(T^{(n-1)}) = (\overline{\mathrm{T}}^{(n-1)})(T'^{(n-1)})$ zusammensetzen aus einer in ihren Parametern passend bestimmten Substitution $(\overline{\mathrm{T}}^{(n-1)})$ und einer Substitution $(T'^{(n-1)})$, welche aus der Gleichung $x^{(n-1)} = y^{(n-1)}$ und einem die Grösse $y^{(n-1)}$ nicht mehr enthaltenden Systeme von $n - 2$ Gleichungen besteht, das, für sich betrachtet, eine zur Zahl $n - 2$ gehörige Substitution $(T^{(n-2)})$ bildet. Fährt man so fort, so ergiebt sich schliesslich, dass jede Substitution $(T^{(n)})$, welche die Form P in eine Form Q überführt, mag dieselbe eine zerfallende oder eine nicht zerfallende sein, sich aus n Substitutionen von der Gestalt $(\overline{\mathrm{T}}^{(n)}), (\overline{\mathrm{T}}^{(n-1)}), \ldots, (\overline{\mathrm{T}}^{(2)}), (\overline{\mathrm{T}}^{(1)})$ beziehlich, unter Hinzunahme identischer Substitutionen, zusammensetzen lässt. Beachtet man dann noch, dass man auch umgekehrt immer wieder eine zur Zahl n gehörige Substitution (T), welche die Form P in eine Form Q überführt, erhält, wenn man in derselben Weise, wie es soeben zur Erzeugung einer gegebenen Substitution $(T^{(n)})$ geschehen ist, n Substitutionen von der Gestalt $(\overline{\mathrm{T}}^{(n)}), (\overline{\mathrm{T}}^{(n-1)}), \ldots, (\overline{\mathrm{T}}^{(2)}), (\overline{\mathrm{T}}^{(1)})$ beziehlich, unter Hinzu-

nahme identischer Substitutionen, zusammensetzt, so ergibt sich schliesslich, dass man alle Substitutionen (T), welche die Form P in Formen Q überführen, erhält, wenn man bei der soeben definirten Substitution $(T^{(n)})$ die in den n erzeugenden Substitutionen $(\overline{T})$ im allgemeinen Falle vorkommenden $\frac{1}{2}n(n+1)$ Parameter sich im Gebiete der rationalen Zahlen frei bewegen lässt, jedoch so, dass niemals die in derselben erzeugenden Substitution vorkommenden Parameter gleichzeitig den Werth Null annehmen. Damit kann aber die Aufgabe, alle Substitutionen (T), welche die Form P in Formen Q überführen, und daher auch die früher gestellte speciellere, alle nicht zerfallenden derartigen Substitutionen (T) anzugeben, als gelöst betrachtet werden.

3.

In diesem Artikel soll noch gezeigt werden, wie man alle Substitutionen (T), welche eine gegebene Form P in eine gleichfalls gegebene Form Q überführen, erhalten kann, sobald eine Substitution (T) bekannt ist, welche diese Überführung bewirkt. Bei der Lösung dieser Aufgabe erkennt man sofort, dass man, sobald eine Substitution $(T) = (T')$, welche die Form P in die Form Q überführt, bekannt ist, alle überhaupt existirenden Substitutionen (T), welche diese Überführung bewirken, aus der Gleichung $(T) = (T')(K)$ erhält, wenn man darin an Stelle der Substitution (K) der Reihe nach eine jede der überhaupt existirenden mit rationalen Zahlen als Coefficienten gebildeten Substitutionen, welche die Form Q in sich überführen, treten lässt, und hat damit die gestellte Aufgabe auf die einfachere zurückgeführt, alle mit rationalen Zahlen k als Coefficienten gebildeten Substitutionen (K) zu bestimmen, welche die Form Q in sich überführen. Die Lösung dieser Aufgabe soll jetzt zum Schlusse für eine beliebig gewählte Form Q angegeben werden.

Versteht man unter $l^{(\mu\nu)}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$ irgend n^2 rationale Zahlen, für welche die Gleichungen:

$$l^{(\varrho\varrho)} = \frac{1}{q^{(\varrho)}}, \qquad l^{(\varrho\sigma)} + l^{(\sigma\varrho)} = 0 \qquad \left(\begin{smallmatrix}\varrho,\ \sigma = 1, 2, \ldots, n\\ \varrho \gtrless \sigma\end{smallmatrix}\right)$$

bestehen, und deren Determinante L in Folge dessen einen von Null verschiedenen Werth besitzt, und setzt alsdann, indem man die Adjuncte von $l^{(\varrho\sigma)}$ in der Determinante L mit $\lambda^{(\varrho\sigma)}$ bezeichnet und unter $\varepsilon^{(1)}\,\varepsilon^{(2)}\ldots\varepsilon^{(n)}$ eine beliebige aus den Zahlen $+1$, -1 als Elementen gebildete Variation versteht:

$$k^{(\varrho\varrho)} = \varepsilon^{(\varrho)}\frac{2\lambda^{(\varrho\varrho)} - Lq^{(\varrho)}}{Lq^{(\varrho)}}, \qquad k^{(\varrho\sigma)} = \varepsilon^{(\varrho)}\frac{2\lambda^{(\varrho\sigma)}}{Lq^{(\varrho)}}, \qquad \left(\begin{smallmatrix}\varrho,\ \sigma = 1, 2, \ldots, n\\ \varrho \gtrless \sigma\end{smallmatrix}\right)$$

so führt die mit diesen rationalen Zahlen k als Coefficienten gebildete Substitution:

$$(K) \qquad \begin{aligned} x^{(1)} &= k^{(11)}y^{(1)} + k^{(12)}y^{(2)} + \cdots + k^{(1n)}y^{(n)},\\ x^{(2)} &= k^{(21)}y^{(1)} + k^{(22)}y^{(2)} + \cdots + k^{(2n)}y^{(n)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x^{(n)} &= k^{(n1)}y^{(1)} + k^{(n2)}y^{(2)} + \cdots + k^{(nn)}y^{(n)} \end{aligned}$$

stets die Form:

$$Q_x = q^{(1)} x^{(1)^2} + q^{(2)} x^{(2)^2} + \cdots + q^{(n)} x^{(n)^2}$$

in die Form:

$$Q_y = q^{(1)} y^{(1)^2} + q^{(2)} y^{(2)^2} + \cdots + q^{(n)} y^{(n)^2}$$

über, und es wird zugleich durch die Gleichungen (K) unter den über die Grössen l, ε gemachten Voraussetzungen die allgemeinste derartige Substitution dargestellt.

In der Substitution (K) ist als specieller Fall die Substitution:

$$(\mathrm{K}) \qquad \begin{aligned} x^{(1)} &= \varepsilon \frac{2q^{(1)} - s}{s} y^{(1)} + \varepsilon \frac{2q^{(2)}}{s} y^{(2)} + \cdots + \varepsilon \frac{2q^{(n)}}{s} y^{(n)}, \\ x^{(2)} &= \varepsilon \frac{2q^{(1)}}{s} y^{(1)} + \varepsilon \frac{2q^{(2)} - s}{s} y^{(2)} + \cdots + \varepsilon \frac{2q^{(n)}}{s} y^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(n)} &= \varepsilon \frac{2q^{(1)}}{s} y^{(1)} + \varepsilon \frac{2q^{(2)}}{s} y^{(2)} + \cdots + \varepsilon \frac{2q^{(n)} - s}{s} y^{(n)}, \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon = \pm 1$, und:

$$q^{(1)} + q^{(2)} + \cdots + q^{(n)} = s$$

gesetzt ist, enthalten, die man als die einfachste nicht zerfallende Substitution (K), welche die Form Q_x in die Form Q_y überführt, ansehen kann, und aus der man sofort die allgemeinere derartige Substitution:

$$(\overline{\mathrm{K}}) \qquad \begin{aligned} x^{(1)} &= \varepsilon \frac{2t^{(1)^2} q^{(1)} - \bar{s}}{\bar{s}} y^{(1)} + \varepsilon \frac{2t^{(1)} t^{(2)} q^{(2)}}{\bar{s}} y^{(2)} + \cdots + \varepsilon \frac{2t^{(1)} t^{(n)} q^{(n)}}{\bar{s}} y^{(n)}, \\ x^{(2)} &= \varepsilon \frac{2t^{(2)} t^{(1)} q^{(1)}}{\bar{s}} y^{(1)} + \varepsilon \frac{2t^{(2)^2} q^{(2)} - \bar{s}}{\bar{s}} y^{(2)} + \cdots + \varepsilon \frac{2t^{(2)} t^{(n)} q^{(n)}}{\bar{s}} y^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(n)} &= \varepsilon \frac{2t^{(n)} t^{(1)} q^{(1)}}{\bar{s}} y^{(1)} + \varepsilon \frac{2t^{(n)} t^{(2)} q^{(2)}}{\bar{s}} y^{(2)} + \cdots + \varepsilon \frac{2t^{(n)^2} q^{(n)} - \bar{s}}{\bar{s}} y^{(n)}, \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon = \pm 1$, und:

$$q^{(1)} t^{(1)^2} + q^{(2)} t^{(2)^2} + \cdots + q^{(n)} t^{(n)^2} = \bar{s}$$

gesetzt ist, ableiten kann. Bei dieser Substitution bezeichnen $t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(n)}$ zunächst von Null verschiedene rationale Zahlen. Da aber die Substitution $(\overline{\mathrm{K}})$ auch dann noch eine, wenn auch zerfallende, Substitution, welche die Form Q_x in die Form Q_y überführt, darstellt, wenn man die Grössen t theilweise der Null gleichsetzt, so soll für das Folgende die Bedingung, dass die t sämmtlich von Null verschieden seien, fallen gelassen werden.

Die gewonnene Substitution $(\overline{\mathrm{K}})$, die im Folgenden, insofern sie zur Zahl n gehört, mit $(\overline{\mathrm{K}}^{(n)})$ bezeichnet werden soll, ist für die Substitutionen (K) von derselben Bedeutung, wie die im vorigen Artikel aufgestellte Substitution $(\overline{\mathrm{T}})$ für die dort behandelten Substitutionen (T). Es kann nämlich gezeigt werden, dass jede Substitution $(K^{(n)})$, welche die Form Q_x in die Form Q_y überführt, sich aus n Substitutionen von

der Gestalt $(\overline{\mathrm{K}}^{(n)})$, $(\overline{\mathrm{K}}^{(n-1)})$, ..., $(\overline{\mathrm{K}}^{(2)})$, $(\overline{\mathrm{K}}^{(1)})$ beziehlich, unter Hinzunahme identischer Substitutionen, zusammensetzen lässt, und daraus folgt weiter, dass man, da auch umgekehrt immer wieder eine zur Zahl n gehörige Substitution (K), welche die Form Q_x in die Form Q_y überführt, entsteht, wenn man n Substitutionen $(\overline{\mathrm{K}}^{(n)})$, $(\overline{\mathrm{K}}^{(n-1)})$, ..., $(\overline{\mathrm{K}}^{(2)})$, $(\overline{\mathrm{K}}^{(1)})$ in dieser Weise zusammensetzt, alle Substitutionen (K), welche die Form Q_x in die Form Q_y überführen, erhält, wenn man die in den n erzeugenden Substitutionen $(\overline{\mathrm{K}})$ vorkommenden $\frac{1}{2}n(n+1)$ Parameter sich im Gebiete der rationalen Zahlen frei bewegen lässt, jedoch so, dass niemals die in derselben erzeugenden Substitution vorkommenden Parameter gleichzeitig den Werth Null annehmen, und zugleich einer jeden der n in den n erzeugenden Substitutionen vorkommenden zweiten Einheitswurzeln unabhängig von den übrigen sowohl den Werth $+1$ als auch den Werth -1 annehmen lässt.

Dritter Abschnitt.

Aufstellung der Fundamentalformel des ersten Theiles.

1.

Gegeben seien zwei quadratische Formen:

$$A = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \left(a^{(1)}_{\mu\mu'} x^{(1)}_{\mu} x^{(1)}_{\mu'} + a^{(2)}_{\mu\mu'} x^{(2)}_{\mu} x^{(2)}_{\mu'} + \cdots + a^{(n)}_{\mu\mu'} x^{(n)}_{\mu} x^{(n)}_{\mu'}\right),$$

$$B = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \left(b^{(1)}_{\mu\mu'} y^{(1)}_{\mu} y^{(1)}_{\mu'} + b^{(2)}_{\mu\mu'} y^{(2)}_{\mu} y^{(2)}_{\mu'} + \cdots + b^{(n)}_{\mu\mu'} y^{(n)}_{\mu} y^{(n)}_{\mu'}\right),$$

die in ihren Coefficienten a, b so beschaffen sind, dass der reelle Theil einer jeden von ihnen eine negative quadratische Form ist, und dass zu ihnen eine Substitution (S) der früher angegebenen Art existirt, welche die Form A in die Form B überführt. Weiteren Bedingungen sollen die Formen A, B nicht unterworfen sein, und es soll auch von der im vorigen Abschnitte eingeführten Beschränkung, dass die die Substitution (S) bildenden partiellen Gleichungensysteme $(S_1), (S_2), \ldots, (S_p)$ nicht zerfallen, hier abgesehen werden. In diesem Artikel soll gezeigt werden, dass jeder Substitution (S) eine charakteristische Thetaformel entspricht, und es soll zugleich die alle diese Formeln umfassende Fundamentalformel aufgestellt werden.

Zu dem Ende ordne man einer jeden der n quadratischen Formen:

$$A^{(1)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a^{(1)}_{\mu\mu'} x^{(1)}_{\mu} x^{(1)}_{\mu'}, \quad A^{(2)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a^{(2)}_{\mu\mu'} x^{(2)}_{\mu} x^{(2)}_{\mu'}, \quad \ldots, \quad A^{(n)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a^{(n)}_{\mu\mu'} x^{(n)}_{\mu} x^{(n)}_{\mu'}$$

eine Thetafunction, welche die Coefficienten der betreffenden Form als Parameter enthält, zu, also für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ der Form $A^{(\nu)}$ die Function:

$$\vartheta(\!(u^{(\nu)})\!)_{a^{(\nu)}} = \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a^{(\nu)}_{\mu\mu'} m^{(\nu)}_{\mu} m^{(\nu)}_{\mu'} + 2 \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m^{(\nu)}_{\mu} u^{(\nu)}_{\mu}},$$

indem man dabei unter $u^{(\nu)}_1, u^{(\nu)}_2, \ldots, u^{(\nu)}_p$ beliebige complexe Veränderliche versteht, und bilde das Product der n Functionen $\vartheta(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}}, \vartheta(\!(u^{(2)})\!)_{a^{(2)}}, \ldots, \vartheta(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}}$; man erhält dann die Gleichung:

$$(F)\qquad \vartheta(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}}\,\vartheta(\!(u^{(2)})\!)_{a^{(2)}}\cdots\vartheta(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}}$$

$$=\sum_{[m_1]}^{-\infty,\ldots,+\infty}\cdots\sum_{[m_p]}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}\left(a^{(1)}_{\mu\mu'}m^{(1)}_{\mu}m^{(1)}_{\mu'}+\cdots+a^{(n)}_{\mu\mu'}m^{(n)}_{\mu}m^{(n)}_{\mu'}\right)+2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(m^{(1)}_{\mu}u^{(1)}_{\mu}+\cdots+m^{(n)}_{\mu}u^{(n)}_{\mu}\right)},$$

bei der für $\mu=1,2,\ldots,p$ das System der n Summationsbuchstaben $m_\mu^{(1)}, m_\mu^{(2)},\ldots,m_\mu^{(n)}$ abgekürzt mit $[m_\mu]$ bezeichnet ist, und das dem bestimmten Index μ entsprechende Zeichen $\sum\limits_{[m_\mu]}^{-\infty,\ldots,+\infty}$ andeuten soll, dass nach jedem der n Summationsbuchstaben $m_\mu^{(1)}, m_\mu^{(2)},\ldots,m_\mu^{(n)}$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu summiren ist.

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende np-fach unendliche Reihe soll jetzt dadurch umgeformt werden*), dass man an Stelle der Summationsbuchstaben m neue Summationsbuchstaben n einführt mit Hülfe der Substitution:

$$(S)\qquad \left.\begin{aligned} r_\mu m_\mu^{(1)} &= c_\mu^{(11)}n_\mu^{(1)}+c_\mu^{(12)}n_\mu^{(2)}+\cdots+c_\mu^{(1n)}n_\mu^{(n)},\\ r_\mu m_\mu^{(2)} &= c_\mu^{(21)}n_\mu^{(1)}+c_\mu^{(22)}n_\mu^{(2)}+\cdots+c_\mu^{(2n)}n_\mu^{(n)},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_\mu m_\mu^{(n)} &= c_\mu^{(n1)}n_\mu^{(1)}+c_\mu^{(n2)}n_\mu^{(2)}+\cdots+c_\mu^{(nn)}n_\mu^{(n)},\end{aligned}\right\}(S_\mu)$$

$$\mu=1,2,\ldots,p,$$

welche aus der früher aufgestellten, die Form A in die Form B überführenden Substitution (S) abgeleitet wird, nachdem man deren Coefficienten $r_\mu^{(\varrho\sigma)}$ entsprechend den Gleichungen:

$$r_\mu^{(\varrho\sigma)}=\frac{c_\mu^{(\varrho\sigma)}}{r_\mu},\qquad \left(\begin{matrix}\varrho,\sigma=1,2,\ldots,n\\ \mu=1,2,\ldots,p\end{matrix}\right)$$

wobei $c_\mu^{(\varrho\sigma)}$ eine ganze, r_μ eine positive ganze Zahl bezeichnet, als Quotienten ganzer Zahlen dargestellt hat, und bei welcher daher die Zahlen c, r den Bedingungen:

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=n}a^{(\varrho)}_{\mu\mu'}c_\mu^{(\varrho\sigma)}c_{\mu'}^{(\varrho\sigma')}=\begin{cases}r_\mu r_{\mu'}b^{(\sigma)}_{\mu\mu'}, & \text{wenn } \sigma'=\sigma,\\ 0, & \text{wenn } \sigma'\gtrless\sigma,\end{cases}\qquad \left(\begin{matrix}\sigma,\sigma'=1,2,\ldots,n\\ \mu,\mu'=1,2,\ldots,p\end{matrix}\right)$$

genügen.

Bezeichnet man die Determinante $\Sigma\pm c_\mu^{(11)}c_\mu^{(22)}\ldots c_\mu^{(nn)}$ der n^2 Coefficienten des Systems (S_μ) mit Δ_μ und die Adjuncte von $c_\mu^{(\varrho\sigma)}$ in dieser Determinante mit $d_\mu^{(\varrho\sigma)}$, so folgt aus den Gleichungen (S) durch Auflösung:

$$(S')\qquad \left.\begin{aligned} \Delta_\mu n_\mu^{(1)} &= r_\mu\left(d_\mu^{(11)}m_\mu^{(1)}+d_\mu^{(21)}m_\mu^{(2)}+\cdots+d_\mu^{(n1)}m_\mu^{(n)}\right),\\ \Delta_\mu n_\mu^{(2)} &= r_\mu\left(d_\mu^{(12)}m_\mu^{(1)}+d_\mu^{(22)}m_\mu^{(2)}+\cdots+d_\mu^{(n2)}m_\mu^{(n)}\right),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta_\mu n_\mu^{(n)} &= r_\mu\left(d_\mu^{(1n)}m_\mu^{(1)}+d_\mu^{(2n)}m_\mu^{(2)}+\cdots+d_\mu^{(nn)}m_\mu^{(n)}\right),\end{aligned}\right\}(S'_\mu)$$

$$\mu=1,2,\ldots,p.$$

*) Man vergl. hiezu die Abhandlung: Prym, Ableitung einer allgemeinen Thetaformel (Acta mathematica, Bd. 3, pag. 216), in welcher die nachstehende Untersuchung für einen speciellen Fall vollständig ausgeführt ist.

Durch Anwendung der Substitution (S) geht aus der Gleichung (F) die Gleichung:

$$(F_1) \qquad \vartheta(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}}\,\vartheta(\!(u^{(2)})\!)_{a^{(2)}} \ldots \vartheta(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}}$$

$$= \sum_{[n_1]} \cdots \sum_{[n_p]} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}\left(b_{\mu\mu'}^{(1)}\, n_\mu^{(1)}\, n_{\mu'}^{(1)} + \cdots + b_{\mu\mu'}^{(n)}\, n_\mu^{(n)}\, n_{\mu'}^{(n)}\right) + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(n_\mu^{(1)}\, v_\mu^{(1)} + \cdots + n_\mu^{(n)}\, v_\mu^{(n)}\right)}$$

hervor, wenn man die Grössen v durch die Gleichungen:

$$r_\mu v_\mu^{(1)} = c_\mu^{(11)} u_\mu^{(1)} + c_\mu^{(21)} u_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(n1)} u_\mu^{(n)},$$
$$r_\mu v_\mu^{(2)} = c_\mu^{(12)} u_\mu^{(1)} + c_\mu^{(22)} u_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(n2)} u_\mu^{(n)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_\mu v_\mu^{(n)} = c_\mu^{(1n)} u_\mu^{(1)} + c_\mu^{(2n)} u_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(nn)} u_\mu^{(n)},$$
$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

definirt; und es ist dabei für $\mu = 1, 2, \ldots, p$ die auf der rechten Seite vorkommende, durch das Zeichen $\sum\limits_{[n_\mu]}$ angedeutete Summation nach $n_\mu^{(1)}, n_\mu^{(2)}, \ldots, n_\mu^{(n)}$ in der Weise auszuführen, dass man an Stelle des Systems der n Summationsbuchstaben $n_\mu^{(1)}, n_\mu^{(2)}, \ldots, n_\mu^{(n)}$ ein jedes der Werthesysteme treten lässt, welche sich dafür aus den Gleichungen (S'_μ) ergeben, wenn man eine jede der n Grössen $m_\mu^{(1)}, m_\mu^{(2)}, \ldots, m_\mu^{(n)}$ unabhängig von den übrigen alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt. Man erkennt aber leicht, dass man diese Summation auch so ausführen kann, dass man die n Grössen $n_\mu^{(1)}, n_\mu^{(2)}, \ldots, n_\mu^{(n)}$ durch die Grössen:

$$\hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(1)}}{\varDelta_\mu}, \quad \hat{n}_\mu^{(2)} + \frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(2)}}{\varDelta_\mu}, \ldots, \hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(n)}}{\varDelta_\mu},$$

in denen zur Abkürzung:

$$\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(1)} = r_\mu\left(d_\mu^{(11)}\alpha_\mu^{(1)} + d_\mu^{(21)}\alpha_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(n1)}\alpha_\mu^{(n)}\right),$$
$$\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(2)} = r_\mu\left(d_\mu^{(12)}\alpha_\mu^{(1)} + d_\mu^{(22)}\alpha_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(n2)}\alpha_\mu^{(n)}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(n)} = r_\mu\left(d_\mu^{(1n)}\alpha_\mu^{(1)} + d_\mu^{(2n)}\alpha_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(nn)}\alpha_\mu^{(n)}\right)$$

gesetzt ist, beziehlich ersetzt, sodann für $\hat{n}_\mu^{(1)}, \hat{n}_\mu^{(2)}, \ldots, \hat{n}_\mu^{(n)}$ ein jedes System von n ganzen Zahlen, für welches die Zahlen:

$$c_\mu^{(11)}\hat{n}_\mu^{(1)} + \cdots + c_\mu^{(1n)}\hat{n}_\mu^{(n)}, \quad c_\mu^{(21)}\hat{n}_\mu^{(1)} + \cdots + c_\mu^{(2n)}\hat{n}_\mu^{(n)}, \quad \ldots, \quad c_\mu^{(n1)}\hat{n}_\mu^{(1)} + \cdots + c_\mu^{(n2)}\hat{n}_\mu^{(n)}$$

ganze Vielfache von r_μ sind, und jedesmal für $\alpha_\mu^{(1)}\alpha_\mu^{(2)}\ldots\alpha_\mu^{(n)}$ eine jede der $\bar{\varDelta}_\mu^n$ Variationen der Elemente $0, 1, 2, \ldots, \bar{\varDelta}_\mu - 1$ zur n^{ten} Classe mit Wiederholung einführt, endlich die dann entstandene Summe durch die Anzahl s_μ der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(D_\mu)\qquad \begin{aligned} r_\mu\left(d_\mu^{(11)} x_\mu^{(1)} + a_\mu^{(21)} x_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(n1)} x_\mu^{(n)}\right) &\equiv 0 \quad (\text{mod. } \varDelta_\mu),\\ r_\mu\left(d_\mu^{(12)} x_\mu^{(1)} + d_\mu^{(22)} x_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(n2)} x_\mu^{(n)}\right) &\equiv 0 \quad (\text{mod. } \varDelta_\mu),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots\cdots\cdots\\ r_\mu\left(d_\mu^{(1n)} x_\mu^{(1)} + d_\mu^{(2n)} x_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(nn)} x_\mu^{(n)}\right) &\equiv 0 \quad (\text{mod. } \varDelta_\mu) \end{aligned}$$

theilt; dabei ist, wie im Folgenden, allgemein mit $\overline{M}$ der absolute Werth der Zahl M bezeichnet, und es sind bei einem auf die ganze Zahl M als Modul sich beziehenden Systeme linearer Congruenzen Normallösungen diejenigen genannt, welche ausschliesslich von Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, \overline{M} - 1$ gebildet sind. Führt man dieses Verfahren der Reihe nach für $\mu = 1, 2, \ldots, p$ durch und multiplicirt hierauf linke und rechte Seite der entstandenen Gleichung mit $s_1 s_2 \ldots s_p$, so geht aus der Gleichung (F_1) die neue Gleichung:

$$(F_2)\qquad s_1 s_2 \ldots s_p\, \vartheta(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}}\, \vartheta(\!(u^{(2)})\!)_{a^{(2)}} \ldots \vartheta(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}}$$

$$= \sum \sum_{\hat{n}} \left\{ \begin{aligned} & e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} \left[b_{\mu\mu'}^{(1)} \left(\hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\overline{\overline{a}}_\mu^{(1)}}{\varDelta_\mu}\right)\left(\hat{n}_{\mu'}^{(1)} + \frac{\overline{\overline{a}}_{\mu'}^{(1)}}{\varDelta_{\mu'}}\right) + \cdots + b_{\mu\mu'}^{(n)} \left(\hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\overline{\overline{a}}_\mu^{(n)}}{\varDelta_\mu}\right)\left(\hat{n}_{\mu'}^{(n)} + \frac{\overline{\overline{a}}_{\mu'}^{(n)}}{\varDelta_{\mu'}}\right)\right]} \\ & \times e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \left[\left(\hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\overline{\overline{a}}_\mu^{(1)}}{\varDelta_\mu}\right) v_\mu^{(1)} + \cdots + \left(\hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\overline{\overline{a}}^{(n)}}{\varDelta_\mu}\right) v_\mu^{(n)}\right]} \end{aligned} \right\}$$

hervor, bei der die Summation in der soeben angegebenen Weise zu geschehen hat.

Die hierbei nach den $\hat{n}$ auszuführende Summation kann von der ihr anhaftenden Beschränkung befreit werden, indem man den Ausdruck:

$$F = \frac{1}{r_1^n r_2^n \cdots r_p^n} \sum_{\beta} e^{2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{1}{r_\mu}\left[\left(\hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{\overline{\overline{a}}_\mu^{(1)}}{\varDelta_\mu}\right)\overline{\beta}_\mu^{(1)} + \cdots + \left(\hat{n}_\mu^{(n)} + \frac{\overline{\overline{a}}_\mu^{(n)}}{\varDelta_\mu}\right)\overline{\beta}_\mu^{(n)}\right]},$$

bei dem zur Abkürzung für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\begin{aligned} \overline{\beta}_\mu^{(1)} &= c_\mu^{(11)} \beta_\mu^{(1)} + c_\mu^{(21)} \beta_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(n1)} \beta_\mu^{(n)},\\ \overline{\beta}_\mu^{(2)} &= c_\mu^{(12)} \beta_\mu^{(1)} + c_\mu^{(22)} \beta_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(n2)} \beta_\mu^{(n)},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \overline{\beta}_\mu^{(n)} &= c_\mu^{(1n)} \beta_\mu^{(1)} + c_\mu^{(2n)} \beta_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(nn)} \beta_\mu^{(n)} \end{aligned}$$

gesetzt ist, und das Zeichen $\sum\limits_{\beta}$ andeutet, dass für ${\nu = 1, 2, \ldots, n \atop \mu = 1, 2, \ldots, p}$ nach $\beta_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis $r_\mu - 1$ zu summiren ist, hinter $\sum\limits_{\hat{n}}$ als Factor einschiebt. Da nämlich der Ausdruck F immer den Werth Null besitzt, wenn an Stelle der $\hat{n}$ solche ganze Zahlen gesetzt werden, für welche die np Grössen:

$$\frac{1}{r_\mu}\left(c_\mu^{(11)} \hat{n}_\mu^{(1)} + \cdots + c_\mu^{(1n)} \hat{n}_\mu^{(n)}\right),\ \frac{1}{r_\mu}\left(c_\mu^{(21)} \hat{n}_\mu^{(1)} + \cdots + c_\mu^{(2n)} \hat{n}_\mu^{(n)}\right), \ldots,\ \frac{1}{r_\mu}\left(c_\mu^{(n1)} \hat{n}_\mu^{(1)} + \cdots + c_\mu^{(nn)} \hat{n}_\mu^{(n)}\right),$$

$$\mu = 1, 2, \cdots, p,$$

nicht sämmtlich ganze Zahlen sind, dagegen den Werth Eins, wenn die soeben angeschriebenen np Grössen sämmtlich ganze Zahlen sind, so erleidet durch Einschiebung des Factors F der Werth der Summe keine Änderung, aber man kann alsdann das Zeichen $\sum\limits_{\hat{n}}$ durch das Zeichen $\sum\limits_{\hat{n}}^{-\infty,\ldots,+\infty}$ ersetzen, das andeutet, dass nach jeder der np Grössen $\hat{n}$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu summiren ist. Multiplicirt man dann noch linke und rechte Seite der so entstandenen Gleichung mit $r_1^n r_2^n \ldots r_p^n$, so erhält man aus der Gleichung (F_2) die Gleichung:

$$(F_3)\qquad r_1^n r_2^n \ldots r_p^n s_1 s_2 \ldots s_p\, \vartheta(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}}\, \vartheta(\!(u^{(2)})\!)_{a^{(2)}} \ldots \vartheta(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}}$$

$$=\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\sum_{\hat{n}}^{-\infty,\ldots,+\infty,} \left\{ \begin{array}{l} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}\left[b_{\mu\mu'}^{(1)}\left(\hat{n}_\mu^{(1)}+\frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(1)}}{\Delta_\mu}\right)\left(\hat{n}_{\mu'}^{(1)}+\frac{\bar{\bar{\alpha}}_{\mu'}^{(1)}}{\Delta_{\mu'}}\right)+\cdots+b_{\mu\mu'}^{(n)}\left(\hat{n}_\mu^{(n)}+\frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(n)}}{\Delta_\mu}\right)\left(\hat{n}_{\mu'}^{(n)}+\frac{\bar{\bar{\alpha}}_{\mu'}^{(n)}}{\Delta_{\mu'}}\right)\right]} \\ \times\, e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left[\left(\hat{n}_\mu^{(1)}+\frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(1)}}{\Delta_\mu}\right)\left(v_\mu^{(1)}+\frac{\bar{\beta}_\mu^{(1)}}{r_\mu}\pi i\right)+\cdots+\left(\hat{n}_\mu^{(n)}+\frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(n)}}{\Delta_\mu}\right)\left(v_\mu^{(n)}+\frac{\bar{\beta}_\mu^{(n)}}{r_\mu}\pi i\right)\right]} \end{array} \right\}.$$

Die Gleichung (F_3) geht aber unmittelbar in die zu Anfang dieses Artikels erwähnte Fundamentalformel über, wenn man die auf ihrer rechten Seite hinter den ersten beiden Summenzeichen stehende np-fach unendliche Reihe durch das mit ihr identische Product der n Thetafunctionen

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\bar{\bar{\alpha}}^{(\nu)}}{\Delta}\\ \frac{\bar{\beta}^{(\nu)}}{r}\end{bmatrix}(\!(v^{(\nu)})\!)_{b^{(\nu)}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ersetzt, und man erhält so die

Fundamentalformel für die Theorie der Thetafunctionen mit rationalen Charakteristiken

in der Gestalt:

$$(\Theta)\qquad r_1^n r_2^n \ldots r_p^n s_1 s_2 \ldots s_p\, \vartheta(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}}\, \vartheta(\!(u^{(2)})\!)_{a^{(2)}} \ldots \vartheta(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}}$$

$$=\sum_{\alpha}\sum_{\beta}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\bar{\bar{\alpha}}^{(1)}}{\Delta}\\ \frac{\bar{\beta}^{(1)}}{r}\end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)_{b^{(1)}}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\bar{\bar{\alpha}}^{(2)}}{\Delta}\\ \frac{\bar{\beta}^{(2)}}{r}\end{bmatrix}(\!(v^{(2)})\!)_{b^{(2)}}\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\bar{\bar{\alpha}}^{(n)}}{\Delta}\\ \frac{\bar{\beta}^{(n)}}{r}\end{bmatrix}(\!(v^{(n)})\!)_{b^{(n)}}.$$

Bei dieser Formel sind die Grössen u und v mit einander verknüpft durch die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} r_\mu v_\mu^{(1)} = c_\mu^{(11)} u_\mu^{(1)} + c_\mu^{(21)} u_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(n1)} u_\mu^{(n)}, & \Delta_\mu u_\mu^{(1)} = r_\mu\left(d_\mu^{(11)} v_\mu^{(1)} + d_\mu^{(12)} v_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(1n)} v_\mu^{(n)}\right), \\ r_\mu v_\mu^{(2)} = c_\mu^{(12)} u_\mu^{(1)} + c_\mu^{(22)} u_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(n2)} u_\mu^{(n)}, & \Delta_\mu u_\mu^{(2)} = r_\mu\left(d_\mu^{(21)} v_\mu^{(1)} + d_\mu^{(22)} v_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(2n)} v_\mu^{(n)}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_\mu v_\mu^{(n)} = c_\mu^{(1n)} u_\mu^{(1)} + c_\mu^{(2n)} u_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(nn)} u_\mu^{(n)}, & \Delta_\mu u_\mu^{(n)} = r_\mu\left(d_\mu^{(n1)} v_\mu^{(1)} + d_\mu^{(n2)} v_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(nn)} v_\mu^{(n)}\right), \end{array}$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p;$$

die $\bar{\bar{\alpha}}$, $\bar{\beta}$ sind lineare Formen der α, β definirt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(1)} &= r_\mu \left(d_\mu^{(11)}\alpha_\mu^{(1)} + d_\mu^{(21)}\alpha_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(n1)}\alpha_\mu^{(n)}\right), & \bar{\beta}_\mu^{(1)} &= c_\mu^{(11)}\beta_\mu^{(1)} + c_\mu^{(21)}\beta_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(n1)}\beta_\mu^{(n)},\\
\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(2)} &= r_\mu \left(d_\mu^{(12)}\alpha_\mu^{(1)} + d_\mu^{(22)}\alpha_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(n2)}\alpha_\mu^{(n)}\right), & \bar{\beta}_\mu^{(2)} &= c_\mu^{(12)}\beta_\mu^{(1)} + c_\mu^{(22)}\beta_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(n2)}\beta_\mu^{(n)},\\
&\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\\
\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(n)} &= r_\mu \left(d_\mu^{(1n)}\alpha_\mu^{(1)} + d_\mu^{(2n)}\alpha_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(nn)}\alpha_\mu^{(n)}\right), & \bar{\beta}_\mu^{(n)} &= c_\mu^{(1n)}\beta_\mu^{(1)} + c_\mu^{(2n)}\beta_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(nn)}\beta_\mu^{(n)},
\end{aligned}$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

und es deutet das Zeichen $\sum\limits_\alpha$ an, dass für ${\nu=1,2,\ldots,n \atop \mu=1,2,\ldots,p}$ nach $\alpha_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis $\Delta_\mu - 1$, das Zeichen $\sum\limits_\beta$, dass für ${\nu=1,2,\ldots,n \atop \mu=1,2,\ldots,p}$ nach $\beta_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis $r_\mu - 1$ zu summiren ist; die mit $s_1, s_2, \ldots, s_p$ bezeichneten ganzen Zahlen endlich sind, da allgemein s_μ die Anzahl der Normallösungen des oben angeschriebenen Congruenzensystems (D_μ) bezeichnet und daher von den Werthen der Grössen r_μ, $c_\mu^{(\varrho\sigma)}$ $(\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n)$ abhängt, in jedem speciellen Falle besonders zu bestimmen.

2.

Aus der Formel (Θ) erhält man durch passende Änderung der in ihr vorkommenden Variablen u, v die allgemeinere:

$$(\Theta')\quad \begin{aligned}
&r_1^n \cdots r_p^n s_1 \cdots s_p\, \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{\gamma}^{(1)} + \hat{\varrho}^{(1)}}{r} + \varkappa^{(1)} \\[2ex] \dfrac{\hat{\hat{\delta}}^{(1)} + \hat{\sigma}^{(1)}}{\Delta} + \lambda^{(1)} \end{bmatrix}\!\left(\!\left(u^{(1)}\right)\!\right)_{a^{(1)}} \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{\gamma}^{(n)} + \hat{\varrho}^{(n)}}{r} + \varkappa^{(n)} \\[2ex] \dfrac{\hat{\hat{\delta}}^{(n)} + \hat{\sigma}^{(n)}}{\Delta} + \lambda^{(n)} \end{bmatrix}\!\left(\!\left(u^{(n)}\right)\!\right)_{a^{(n)}} e^{-\varphi}\\
&= \sum_\alpha \sum_\beta \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\bar{\alpha}}^{(1)} + \bar{\bar{\varkappa}}^{(1)}}{\Delta} + \varrho^{(1)} \\[2ex] \dfrac{\bar{\beta}^{(1)} + \bar{\lambda}^{(1)}}{r} + \sigma^{(1)} \end{bmatrix}\!\left(\!\left(v^{(1)}\right)\!\right)_{b^{(1)}} \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\bar{\alpha}}^{(n)} + \bar{\bar{\varkappa}}^{(n)}}{\Delta} + \varrho^{(n)} \\[2ex] \dfrac{\bar{\beta}^{(n)} + \bar{\lambda}^{(n)}}{r} + \sigma^{(n)} \end{bmatrix}\!\left(\!\left(v^{(n)}\right)\!\right)_{b^{(n)}} e^{-\psi}\\
&\quad\times e^{2\pi i \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \left(\frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(\nu)}}{\Delta_\mu} \delta_\mu^{(\nu)} - \frac{\bar{\beta}_\mu^{(\nu)}}{r_\mu} \gamma_\mu^{(\nu)}\right)},
\end{aligned}$$

wobei:

$$\varphi = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \left(\frac{\hat{\varrho}_\mu^{(\nu)}}{r_\mu} + \varkappa_\mu^{(\nu)}\right) \frac{\hat{\hat{\delta}}_\mu^{(\nu)}}{\Delta_\mu}, \qquad \psi = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \left(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}_\mu^{(\nu)}}{\Delta_\mu} + \varrho_\mu^{(\nu)}\right) \frac{\bar{\beta}_\mu^{(\nu)}}{r_\mu}.$$

In dieser Formel bezeichnen $\varkappa_\mu^{(\nu)}, \lambda_\mu^{(\nu)}, \varrho_\mu^{(\nu)}, \sigma_\mu^{(\nu)}$ $\left({\nu=1,2,\ldots,n \atop \mu=1,2,\ldots,p}\right)$ $4np$ beliebige reelle Grössen, $\gamma_\mu^{(\nu)}, \delta_\mu^{(\nu)}$ $\left({\nu=1,2,\ldots,n \atop \mu=1,2,\ldots,p}\right)$ irgend $2np$ ganze Zahlen; unter $\bar{\bar{\varkappa}}_\mu^{(\nu)}, \bar{\lambda}_\mu^{(\nu)}$ $\left({\nu=1,2,\ldots,n \atop \mu=1,2,\ldots,p}\right)$ sind Grössen verstanden, die sich aus den $\varkappa$, λ in derselben Weise zusammensetzen, wie die Grössen $\bar{\bar{\alpha}}$, $\bar{\beta}$ aus den α, β; die Grössen $\hat{\varrho}$, $\hat{\hat{\sigma}}$ sind definirt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\hat{\varrho}_\mu^{(1)} &= c_\mu^{(11)}\varrho_\mu^{(1)} + c_\mu^{(12)}\varrho_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(1n)}\varrho_\mu^{(n)}, & \hat{\hat{\sigma}}_\mu^{(1)} &= r_\mu\left(d_\mu^{(11)}\sigma_\mu^{(1)} + d_\mu^{(12)}\sigma_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(1n)}\sigma_\mu^{(n)}\right), \\
\hat{\varrho}_\mu^{(2)} &= c_\mu^{(21)}\varrho_\mu^{(1)} + c_\mu^{(22)}\varrho_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(2n)}\varrho_\mu^{(n)}, & \hat{\hat{\sigma}}_\mu^{(2)} &= r_\mu\left(d_\mu^{(21)}\sigma_\mu^{(1)} + d_\mu^{(22)}\sigma_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(2n)}\sigma_\mu^{(n)}\right), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\hat{\varrho}_\mu^{(n)} &= c_\mu^{(n1)}\varrho_\mu^{(1)} + c_\mu^{(n2)}\varrho_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(nn)}\varrho_\mu^{(n)}, & \hat{\hat{\sigma}}_\mu^{(n)} &= r_\mu\left(d_\mu^{(n1)}\sigma_\mu^{(1)} + d_\mu^{(n2)}\sigma_\mu^{(2)} + \cdots + d_\mu^{(nn)}\sigma_\mu^{(n)}\right),
\end{aligned}$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

und unter $\hat{\gamma}_\mu^{(\nu)}, \hat{\hat{\delta}}_\mu^{(\nu)} \left({\nu = 1, 2, \ldots, n \atop \mu = 1, 2, \ldots, p}\right)$ endlich sind Grössen verstanden, die sich aus den γ, δ in derselben Weise zusammensetzen wie die $\hat{\varrho}, \hat{\hat{\sigma}}$ aus den ϱ, σ.

Lässt man bei festgehaltenen Werthen der $\varkappa, \lambda, \varrho, \sigma$ an Stelle des Systems der $2np$ Buchstaben γ, δ alle Systeme von je $2np$ ganzen Zahlen treten, welche den Bedingungen $0 \leqq \gamma_\mu^{(\nu)} \overline{\gtrless} r_\mu - 1$, $0 \leqq \delta_\mu^{(\nu)} \overline{\gtrless} \bar{\Delta}_\mu - 1$ $\left({\nu = 1, 2, \ldots, n \atop \mu = 1, 2, \ldots, p}\right)$ genügen, so erhält man aus der Formel (Θ') ein System von $N = r_1^n \ldots r_p^n \bar{\Delta}_1^n \ldots \bar{\Delta}_p^n$ speciellen Formeln, von denen aber jede auf ihrer rechten Seite dieselben N Thetaproducte enthält. Um einen Einblick in die Natur dieses Gleichungensystems zu erhalten, setze man zur Abkürzung:

$$\vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\bar{\alpha}}^{(1)} + \bar{\bar{\varkappa}}^{(1)}}{\Delta} + \varrho^{(1)} \\ \dfrac{\bar{\beta}^{(1)} + \bar{\lambda}^{(1)}}{r} + \sigma^{(1)} \end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(1)}\right)\!\right)_{b^{(1)}} \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\bar{\alpha}}^{(n)} + \bar{\bar{\varkappa}}^{(n)}}{\Delta} + \varrho^{(n)} \\ \dfrac{\bar{\beta}^{(n)} + \bar{\lambda}^{(n)}}{r} + \sigma^{(n)} \end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(n)}\right)\!\right)_{b^{(n)}} e^{-\psi} = X_{\left[\alpha \atop \beta\right]},$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{\gamma}^{(1)} + \hat{\varrho}^{(1)}}{r} + \varkappa^{(1)} \\ \dfrac{\hat{\hat{\delta}}^{(1)} + \hat{\hat{\sigma}}^{(1)}}{\Delta} + \lambda^{(1)} \end{bmatrix}\left(\!\left(u^{(1)}\right)\!\right)_{a^{(1)}} \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{\gamma}^{(n)} + \hat{\varrho}^{(n)}}{r} + \varkappa^{(n)} \\ \dfrac{\hat{\hat{\delta}}^{(n)} + \hat{\hat{\sigma}}^{(n)}}{\Delta} + \lambda^{(n)} \end{bmatrix}\left(\!\left(u^{(n)}\right)\!\right)_{a^{(n)}} e^{-\varphi} = Y_{\left[\gamma \atop \delta\right]},$$

$$e^{2\pi i \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(\frac{\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(\nu)}}{\Delta_\mu}\delta_\mu^{(\nu)} - \frac{\bar{\beta}_\mu^{(\nu)}}{r_\mu}\gamma_\mu^{(\nu)}\right)} = e^{2\pi i \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=n}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(\alpha_\mu^{(\nu)}\frac{\hat{\hat{\delta}}_\mu^{(\nu)}}{\Delta_\mu} - \beta_\mu^{(\nu)}\frac{\hat{\gamma}_\mu^{(\nu)}}{r_\mu}\right)} = C_{\left[\gamma \atop \delta\right]\left[\alpha \atop \beta\right]};$$

aus der Formel (Θ') geht dann die Gleichung:

$$(G) \qquad r_1^n \ldots r_p^n s_1 \ldots s_p Y_{\left[\gamma \atop \delta\right]} = \sum_{\alpha, \beta} C_{\left[\gamma \atop \delta\right]\left[\alpha \atop \beta\right]} X_{\left[\alpha \atop \beta\right]}$$

hervor, und die Untersuchung des soeben definirten Systems specieller Thetaformeln ist damit zurückgeführt auf die Untersuchung des Systems jener N linearen Gleichungen, welche aus der aufgestellten Gleichung (G) hervorgehen, wenn man darin an Stelle des Zahlencomplexes $\left[\gamma \atop \delta\right]$ die vorher definirten N Complexe von je $2np$ ganzen Zahlen treten lässt.

Bezeichnet man wie bisher die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(D_\mu) \quad r_\mu \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\mu^{(\nu 1)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 \pmod{\Delta_\mu}, \; r_\mu \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\mu^{(\nu 2)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 \pmod{\Delta_\mu}, \ldots, \; r_\mu \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\mu^{(\nu n)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 \pmod{\Delta_\mu},$$

welche die gleiche ist, wie die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(D_\mu') \quad r_\mu \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\mu^{(1\nu)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} \varDelta_\mu), \; r_\mu \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\mu^{(2\nu)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} \varDelta_\mu), \; \ldots, \; r_\mu \sum_{\nu=1}^{\nu=n} d_\mu^{(n\nu)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} \varDelta_\mu)$$

mit s_μ; ferner die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(C_\mu) \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\mu^{(\nu 1)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} r_\mu), \; \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\mu^{(\nu 2)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} r_\mu), \; \ldots, \; \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\mu^{(\nu n)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} r_\mu),$$

welche die gleiche ist, wie die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(C_\mu') \quad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\mu^{(1\nu)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} r_\mu), \; \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\mu^{(2\nu)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} r_\mu), \; \ldots, \; \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\mu^{(n\nu)} x_\mu^{(\nu)} \equiv 0 (\text{mod.} r_\mu)$$

mit s_μ' und setzt zur Abkürzung:

$$N = s_1 \ldots s_p s_1' \ldots s_p' N',$$

so ergiebt sich, dass man die N Summanden der auf der rechten Seite der Gleichung (G) stehenden Summe in N' Gruppen von je $s_1 \ldots s_p s_1' \ldots s_p'$ gleichen Summanden ordnen und daher die rechte Seite der Gleichung (G) selbst durch das $s_1 \ldots s_p s_1' \ldots s_p'$-fache einer Summe von nur N' Summanden ersetzen kann. Weiter folgt aber auch, dass die N linearen Gleichungen, welche aus der Gleichung (G) in der oben angegebenen Weise hervorgehen, in N' Gruppen von je $s_1 \ldots s_p s_1' \ldots s_p'$ unter einander nicht wesentlich verschiedenen Gleichungen angeordnet werden können, und es reducirt sich daher schliesslich das in Rede stehende System von N linearen Gleichungen immer auf ein System von N' linearen Gleichungen, die nur N' Grössen X und N' Grössen Y enthalten. Zur wirklichen Durchführung dieser Reduction müssen aber die Zahlenwerthe der Grössen c und r bekannt sein; solange dies nicht der Fall ist, wird das genannte nicht reducirte System von N linearen Gleichungen die Grundlage für die weiteren Untersuchungen zu bilden haben.

Das in Rede stehende System von N linearen Gleichungen kann nach den Grössen X als Unbekannten aufgelöst werden. Zu dem Ende multiplicire man linke und rechte Seite der Gleichung (G), indem man unter $\left[{\alpha' \atop \beta'}\right]$ einen beliebigen der N auf der rechten Seite dieser Gleichung bei Ausführung der Summation auftretenden Zahlencomplexe versteht, mit $C^{-1}_{\left[{\gamma \atop \delta}\right]\left[{\alpha' \atop \beta'}\right]}$ und summire für ${\nu = 1, 2, \ldots, n \atop \mu = 1, 2, \ldots, p}$ nach $\gamma_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis $r_\mu - 1$, nach $\delta_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis $\overline{\varDelta}_\mu - 1$. Unter Berücksichtigung der Relationen:

$$\sum_{\gamma,\delta} C_{\left[{\gamma \atop \delta}\right]\left[{\alpha \atop \beta}\right]} C^{-1}_{\left[{\gamma \atop \delta}\right]\left[{\alpha' \atop \beta'}\right]} = \begin{matrix} 0, \text{ wenn nicht für jedes } \mu \text{ und } \nu\text{: } \bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(\nu)} \equiv \bar{\bar{\alpha}}'^{(\nu)}_\mu (\text{mod.} \varDelta_\mu), \; \bar{\beta}_\mu^{(\nu)} \equiv \bar{\beta}'^{(\nu)}_\mu (\text{mod.} r_\mu), \\ N, \text{ wenn für jedes } \mu \text{ und } \nu\text{: } \bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(\nu)} \equiv \bar{\bar{\alpha}}'^{(\nu)}_\mu (\text{mod.} \varDelta_\mu), \; \bar{\beta}_\mu^{(\nu)} \equiv \bar{\beta}'^{(\nu)}_\mu (\text{mod.} r_\mu), \end{matrix}$$

erhält man dann ohne Mühe, wenn man zuletzt noch den Accent bei den Buchstaben α, β unterdrückt, die Gleichung:

$$(G') \qquad \overline{\varDelta}_1^n \ldots \overline{\varDelta}_p^n s_1' \ldots s_p' X_{\left[{\alpha \atop \beta}\right]} = \sum_{\gamma, \delta} C^{-1}_{\left[{\gamma \atop \delta}\right]\left[{\alpha \atop \beta}\right]} Y_{\left[{\gamma \atop \delta}\right]}.$$

Aus dieser Gleichung geht aber, wenn man darin an Stelle des Systems der $2np$ Buchstaben α, β alle Systeme von je $2np$ ganzen Zahlen treten lässt, welche den Bedingungen $0 \leqq \alpha_\mu^{(\nu)} \overline{\gtrless} \overline{\varDelta}_\mu - 1$, $0 \leqq \beta_\mu^{(\nu)} \overline{\gtrless} r_\mu - 1$ $\left({\nu = 1, 2, \ldots, n \atop \mu = 1, 2, \ldots, p}\right)$ genügen, ein System

von N linearen Gleichungen hervor, welches die gewünschte Auflösung des ursprünglichen, aus (G) abgeleiteten Systems von N linearen Gleichungen nach den Grössen X als Unbekannten darstellt.

Die Gleichung (G') ist entstanden, indem man die N speciellen Gleichungen, welche in der Gleichung (G) enthalten sind, linear verband. Aus diesen N Gleichungen lassen sich aber weiter auch, indem man nur einzelne, passend gewählte unter ihnen linear verbindet, Gleichungen in grosser Zahl ableiten, von denen jede mehrere Grössen X und mehrere Grössen Y enthält, und bei denen als Coefficienten ausschliesslich Grössen C und C^{-1} auftreten. Von der Aufstellung solcher Gleichungen soll aber hier abgesehen werden, und es möge bezüglich der Behandlung eines dahin gehörigen speciellen Falles auf die frühere Untersuchung*): „Über ein für die Theorie der Thetafunctionen fundamentales System linearer Gleichungen" verwiesen werden.

3.

Man nehme jetzt an, dass drei in ihren Coefficienten a, b, c den für Parameter von Thetafunctionen bestehenden Bedingungen genügende quadratische Formen:

$$A = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} (a^{(1)}_{\mu\mu'} x^{(1)}_{\mu} x^{(1)}_{\mu'} + a^{(2)}_{\mu\mu'} x^{(2)}_{\mu} x^{(2)}_{\mu'} + \cdots + a^{(n)}_{\mu\mu'} x^{(n)}_{\mu} x^{(n)}_{\mu'}),$$

$$B = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} (b^{(1)}_{\mu\mu'} y^{(1)}_{\mu} y^{(1)}_{\mu'} + b^{(2)}_{\mu\mu'} y^{(2)}_{\mu} y^{(2)}_{\mu'} + \cdots + b^{(n)}_{\mu\mu'} y^{(n)}_{\mu} y^{(n)}_{\mu'}),$$

$$C = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} (c^{(1)}_{\mu\mu'} z^{(1)}_{\mu} z^{(1)}_{\mu'} + c^{(2)}_{\mu\mu'} z^{(2)}_{\mu} z^{(2)}_{\mu'} + \cdots + c^{(n)}_{\mu\mu'} z^{(n)}_{\mu} z^{(n)}_{\mu'})$$

gegeben seien, die zudem so beschaffen sind, dass die Form A durch Anwendung der Substitution:

$$(S) \qquad r_{\mu} x^{(\nu)}_{\mu} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} c^{(\nu\varrho)}_{\mu} y^{(\varrho)}_{\mu}, \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

bei der die c ganze Zahlen, die r positive ganze Zahlen bezeichnen, in die Form B, die Form B durch Anwendung der Substitution:

$$(S_1) \qquad s_{\mu} y^{(\nu)}_{\mu} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} d^{(\nu\sigma)}_{\mu} z^{(\sigma)}_{\mu}, \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

bei der die d ganze Zahlen, die s positive ganze Zahlen bezeichnen, in die Form C, und daher auch die Form A durch Anwendung der aus (S) und (S_1) zusammengesetzten Substitution:

$$(S_2) \qquad r_{\mu} s_{\mu} x^{(\nu)}_{\mu} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} e^{(\nu\sigma)}_{\mu} z^{(\sigma)}_{\mu}, \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

bei der:

$$e^{(\nu\sigma)}_{\mu} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} c^{(\nu\varrho)}_{\mu} d^{(\varrho\sigma)}_{\mu} \qquad \begin{pmatrix} \nu, \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

ist, in die Form C übergeht.

---

*) Prym, Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie. V. Leipzig 1882. Teubner.

Nach Früherem entspricht dann zunächst der Überführung der Form A in die Form B durch die Substitution (S) die in Art. 1 aufgestellte Formel (Θ), bei der das auf der linken Seite stehende Thetaproduct als Parameter die Coefficienten a der Form A, als Argumente von einander unabhängige Veränderliche u enthält, während die auf der rechten Seite der Formel vorkommenden Thetaproducte als Parameter die Coefficienten b der Form B, als Argumente Grössen v enthalten, die mit den Grössen u durch die Gleichungen:

$$(T) \qquad r_\mu v_\mu^{(\varrho)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\mu^{(\nu\varrho)} u_\mu^{(\nu)} \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

verknüpft sind.

In gleicher Weise entspricht weiter der Überführung der Form B in die Form C durch die Substitution (S_1) eine der Formel (Θ) analoge, mit (Θ_1) zu bezeichnende Formel, bei der als Parameter des auf der linken Seite stehenden Thetaproductes die Coefficienten b der Form B, als Parameter der auf der rechten Seite vorkommenden Thetaproducte die Coefficienten c der Form C auftreten. Als Argumente des auf der linken Seite stehenden Thetaproductes nehme man die auf der rechten Seite der Formel (Θ) vorkommenden oben definirten Grössen v und verwende mit Rücksicht darauf zur Bezeichnung der Argumente der auf der rechten Seite vorkommenden Thetaproducte den Buchstaben w. Die Grössen w sind dann mit den Grössen v durch die Gleichungen:

$$(T_1) \qquad s_\mu w_\mu^{(\sigma)} = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} d_\mu^{(\varrho\sigma)} v_\mu^{(\varrho)} \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

verknüpft, mit den Grössen u dagegen durch die Gleichungen:

$$(T_2) \qquad r_\mu s_\mu w_\mu^{(\sigma)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} e_\mu^{(\nu\sigma)} u_\mu^{(\nu)}. \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \ldots, n \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

Endlich entspricht der Überführung der Form A in die Form C durch die Substitution (S_2) eine der Formel (Θ) analoge, mit (Θ_2) zu bezeichnende Formel, bei der als Parameter des auf der linken Seite stehenden Thetaproductes die Coefficienten a der Form A, als Parameter der auf der rechten Seite vorkommenden Thetaproducte die Coefficienten c der Form C auftreten. Als Argumente des auf der linken Seite stehenden Thetaproductes nehme man die in der Formel (Θ) vorkommenden Grössen u, die Argumente der auf der rechten Seite vorkommenden Thetaproducte sind dann mit den auf der rechten Seite der Formel (Θ_1) vorkommenden Grössen w identisch.

Die Formeln (Θ), (Θ_1), (Θ_2) sind dann nicht unabhängig von einander. Leitet man nämlich aus der Formel (Θ_1) durch passende Änderung der Argumente eine der Formel (Θ') des vorigen Artikels analoge, mit (Θ_1') zu bezeichnende Formel ab und drückt mit Hülfe dieser Formel ein jedes der auf der rechten Seite der Formel (Θ) vorkommenden Thetaproducte als lineare Function von Thetaproducten mit den Argumenten w und den Parametern c aus, so erhält man eine mit $(\overline{\Theta}_2)$ zu bezeichnende Formel, welche ebenso wie die Formel (Θ_2) das Thetaproduct $\vartheta(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}} \vartheta(\!(u^{(2)})\!)_{a^{(2)}} \ldots \vartheta(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}}$ als lineare Function von Thetaproducten mit den Argumenten w und den Parametern c darstellt und sich von der Formel (Θ_2) nur durch die Form unterscheidet,

in dem Sinne, dass diese beiden Darstellungen (Θ_2) und $(\bar{\Theta}_2)$, wenn man bei jeder von ihnen die Charakteristiken der auf ihren rechten Seiten vorkommenden Thetaproducte auf Normalcharakteristiken reducirt und alsdann Glieder, welche dieselben Thetaproducte enthalten, vereinigt, nicht von einander verschieden sind.

Aus den in den Art. 2 und 3 des vorigen Abschnitts erhaltenen Resultaten geht hervor, dass jede Substitution (S) der früher betrachteten Art, welche eine Form A in eine Form B überführt, sich aus einer endlichen Anzahl ausgezeichneter Substitutionen $(\bar{S})$ zusammensetzen lässt. Verbindet man dieses Resultat mit dem soeben gewonnenen, so ergibt sich, dass man die Formel (Θ), welche der Überführung der Form A in die Form B durch die Substitution (S) entspricht, auch erhalten kann, indem man die den ausgezeichneten Substitutionen $(\bar{S})$ entsprechenden Formeln (Θ), (Θ') in oben angegebener Weise verbindet. Man kann sich demnach bei der Herstellung specieller Thetaformeln auf diejenigen charakteristischen Formeln (Θ), (Θ') beschränken, welche den durch die Untersuchungen des zweiten Abschnitts gewonnenen ausgezeichneten Substitutionen $(\bar{S})$ entsprechen. Von diesen Formeln sollen in den zunächst folgenden Abschnitten diejenigen, welche für die Theorie der Thetafunctionen von Bedeutung sind, aufgestellt und in die einfachste Gestalt gebracht werden.

Vierter Abschnitt.

Erste Specialisirung der Fundamentalformel.

1.

Anknüpfend an die Untersuchungen des zweiten Abschnitts kann man das folgende Resultat aussprechen:

Die Form:

$$A = \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(p^{(1)}x_\mu^{(1)}x_{\mu'}^{(1)} + p^{(2)}x_\mu^{(2)}x_{\mu'}^{(2)} + \cdots + p^{(n)}x_\mu^{(n)}x_{\mu'}^{(n)}\right),$$

bei der die p irgend welche positive rationale Zahlen bezeichnen sollen, geht durch Anwendung der Substitution:

$$(S)\qquad \left.\begin{array}{l} x_\mu^{(1)} = \quad p^{(2)}y_\mu^{(1)} + p^{(3)}y_\mu^{(2)} + p^{(4)}y_\mu^{(3)} + \cdots + p^{(n)}y_\mu^{(n-1)} + y_\mu^{(n)},\\ x_\mu^{(2)} = -s^{(1)}y_\mu^{(1)} + p^{(3)}y_\mu^{(2)} + p^{(4)}y_\mu^{(3)} + \cdots + p^{(n)}y_\mu^{(n-1)} + y_\mu^{(n)},\\ x_\mu^{(3)} = \qquad\qquad -s^{(2)}y_\mu^{(2)} + p^{(4)}y_\mu^{(3)} + \cdots + p^{(n)}y_\mu^{(n-1)} + y_\mu^{(n)},\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ x_\mu^{(n)} = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -s^{(n-1)}y_\mu^{(n-1)} + y_\mu^{(n)}, \end{array}\right\}(S_\mu)$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

wobei allgemein:

$$p^{(1)} + p^{(2)} + \cdots + p^{(\nu)} = s^{(\nu)}$$

gesetzt ist, über in die Form:

$$B = \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(q^{(1)}y_\mu^{(1)}y_{\mu'}^{(1)} + q^{(2)}y_\mu^{(2)}y_{\mu'}^{(2)} + \cdots + q^{(n)}y_\mu^{(n)}y_{\mu'}^{(n)}\right),$$

bei der:

$$q^{(1)} = s^{(1)}s^{(2)}p^{(2)},\quad q^{(2)} = s^{(2)}s^{(3)}p^{(3)},\quad \ldots,\quad q^{(n-1)} = s^{(n-1)}s^{(n)}p^{(n)},\quad q^{(n)} = s^{(n)}$$

ist.

Unter der Voraussetzung, dass die Grössen $a_{\mu\mu'}$ den für Parameter von Thetafunctionen bestehenden Bedingungen genügen, die p aber positive ganze Zahlen sind, soll jetzt diejenige Thetaformel, welche der Überführung der Form A in die Form B durch die Substitution (S) entspricht, aus der in Art. 1 des dritten Abschnitts aufgestellten Fundamentalformel (Θ) abgeleitet werden.

Zu dem Ende hat man die in der Formel (Θ) vorkommenden Grössen $a^{(1)}_{\mu\mu'}, \ldots, a^{(n)}_{\mu\mu'}, b^{(1)}_{\mu\mu'}, \ldots, b^{(n)}_{\mu\mu'}$, $(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$ in die Coefficienten der soeben aufgestellten Formen A, B und zugleich die der Formel (Θ) zu Grunde liegende allgemeine Substitution (S) in die hier vorliegende specielle Substitution (S) übergehen zu lassen. Man erhält dann die gewünschte Thetaformel zunächst in der Gestalt:

$$\bar{s}^p \vartheta(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}} \vartheta(\!(u^{(2)})\!)_{a^{(2)}} \ldots \vartheta(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}}$$

$$= \sum_{\alpha}^{0,1,\ldots,\Delta-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\bar{\alpha}}^{(1)}}{\Delta} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(v^{(1)})\!)_{b^{(1)}} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\bar{\alpha}}^{(2)}}{\Delta} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(v^{(2)})\!)_{b^{(2)}} \ldots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\bar{\alpha}}^{(n)}}{\Delta} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(v^{(n)})\!)_{b^{(n)}};$$

dabei ist zur Abkürzung:

$$s^{(2)} s^{(3)} \ldots s^{(n)} = \Delta$$

gesetzt, das Zeichen $\sum\limits_{\alpha}^{0,1,\ldots,\Delta-1}$ deutet an, dass nach jedem der np in den linearen Formen:

$$\bar{\bar{\alpha}}^{(1)}_{\mu} = \frac{\Delta}{s^{(1)} s^{(2)}} [s^{(1)}(\alpha^{(1)}_{\mu} - \alpha^{(2)}_{\mu})],$$

$$\bar{\bar{\alpha}}^{(2)}_{\mu} = \frac{\Delta}{s^{(2)} s^{(3)}} [s^{(1)}(\alpha^{(1)}_{\mu} - \alpha^{(2)}_{\mu}) + s^{(2)}(\alpha^{(2)}_{\mu} - \alpha^{(3)}_{\mu})],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{\bar{\alpha}}^{(n-1)}_{\mu} = \frac{\Delta}{s^{(n-1)} s^{(n)}} [s^{(1)}(\alpha^{(1)}_{\mu} - \alpha^{(2)}_{\mu}) + s^{(2)}(\alpha^{(2)}_{\mu} - \alpha^{(3)}_{\mu}) + \cdots + s^{(n-1)}(\alpha^{(n-1)}_{\mu} - \alpha^{(n)}_{\mu})],$$

$$\bar{\bar{\alpha}}^{(n)}_{\mu} = \frac{\Delta}{s^{(n)}} [s^{(1)}(\alpha^{(1)}_{\mu} - \alpha^{(2)}_{\mu}) + s^{(2)}(\alpha^{(2)}_{\mu} - \alpha^{(3)}_{\mu}) + \cdots + s^{(n-1)}(\alpha^{(n-1)}_{\mu} - \alpha^{(n)}_{\mu}) + s^{(n)} \alpha^{(n)}_{\mu}],$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

vorkommenden α von 0 bis $\Delta - 1$ zu summiren ist, und $\bar{s}$ bezeichnet die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$\frac{\Delta}{s^{(1)} s^{(2)}} (p^{(1)} x^{(1)} - s^{(1)} x^{(2)}) \equiv 0 \pmod{\Delta},$$

$$\frac{\Delta}{s^{(2)} s^{(3)}} (p^{(1)} x^{(1)} + p^{(2)} x^{(2)} - s^{(2)} x^{(3)}) \equiv 0 \pmod{\Delta},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\Delta}{s^{(n-1)} s^{(n)}} (p^{(1)} x^{(1)} + p^{(2)} x^{(2)} + p^{(3)} x^{(3)} + \cdots + p^{(n-1)} x^{(n-1)} - s^{(n-1)} x^{(n)}) \equiv 0 \pmod{\Delta},$$

$$\frac{\Delta}{s^{(n)}} (p^{(1)} x^{(1)} + p^{(2)} x^{(2)} + p^{(3)} x^{(3)} + \cdots + p^{(n-1)} x^{(n-1)} + p^{(n)} x^{(n)}) \equiv 0 \pmod{\Delta}.$$

Unter Berücksichtigung, dass die soeben genannte Zahl $\bar{s}$ den Werth:

$$\bar{s} = \Delta^{n-1}$$

besitzt, und durch mehrfache leicht ersichtliche Umformungen kann man aber die gewonnene Thetaformel in die reducirte Gestalt:

$$\vartheta\left(\!\left(u^{(1)}\right)\!\right)_{a^{(1)}}\vartheta\left(\!\left(u^{(2)}\right)\!\right)_{a^{(2)}}\cdots\vartheta\left(\!\left(u^{(n)}\right)\!\right)_{a^{(n)}}$$

$$(\Theta)\qquad =\sum_{\varepsilon}\left\{\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\sigma^{(1)}}{s^{(1)}s^{(2)}}\\ 0\end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(1)}\right)\!\right)_{b^{(1)}}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\sigma^{(2)}}{s^{(2)}s^{(3)}}\\ 0\end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(2)}\right)\!\right)_{b^{(2)}}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\sigma^{(n-1)}}{s^{(n-1)}s^{(n)}}\\ 0\end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(n-1)}\right)\!\right)_{b^{(n-1)}}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\sigma^{(n-1)}}{s^{(n)}}\\ 0\end{bmatrix}\left(\!\left(v^{(n)}\right)\!\right)_{b^{(n)}}\right\}$$

bringen, wobei zur Abkürzung für $\substack{\nu=1,2,\ldots,n-1\\ \mu=1,2,\ldots,p}$:

$$s^{(1)}\varepsilon_\mu^{(1)}+s^{(2)}\varepsilon_\mu^{(2)}+\cdots+s^{(\nu)}\varepsilon_\mu^{(\nu)}=\sigma_\mu^{(\nu)}$$

gesetzt ist. In dieser Formel bezeichnen also $p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots, p^{(n)}$ irgend welche positive ganze Zahlen, aus denen sich die ganzen Zahlen $s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(n)}$ den Gleichungen $s^{(\nu)}=p^{(1)}+p^{(2)}+\cdots+p^{(\nu)}$ $(\nu=1,2,\ldots,n)$ gemäss zusammensetzen. Ferner ist:

$$a_{\mu\mu'}^{(1)}=p^{(1)}a_{\mu\mu'},\quad a_{\mu\mu'}^{(2)}=p^{(2)}a_{\mu\mu'},\quad\ldots,\quad a_{\mu\mu'}^{(n-1)}=p^{(n-1)}a_{\mu\mu'},\quad a_{\mu\mu'}^{(n)}=p^{(n)}a_{\mu\mu'},$$
$$b_{\mu\mu'}^{(1)}=s^{(1)}s^{(2)}p^{(2)}a_{\mu\mu'},\quad b_{\mu\mu'}^{(2)}=s^{(2)}s^{(3)}p^{(3)}a_{\mu\mu'},\quad\ldots,\quad b_{\mu\mu'}^{(n-1)}=s^{(n-1)}s^{(n)}p^{(n)}a_{\mu\mu'},\quad b_{\mu\mu'}^{(n)}=s^{(n)}a_{\mu\mu'},$$
$$\mu,\mu'=1,2,\ldots,p;$$

weiter sind die Grössen v durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
v_\mu^{(1)}&=p^{(2)}u_\mu^{(1)}-s^{(1)}u_\mu^{(2)},\\
v_\mu^{(2)}&=p^{(3)}u_\mu^{(1)}+p^{(3)}u_\mu^{(2)}-s^{(2)}u_\mu^{(3)},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
v_\mu^{(n-1)}&=p^{(n)}u_\mu^{(1)}+p^{(n)}u_\mu^{(2)}+p^{(n)}u_\mu^{(3)}+\cdots+p^{(n)}u_\mu^{(n-1)}-s^{(n-1)}u_\mu^{(n)},\\
v_\mu^{(n)}&=u_\mu^{(1)}+u_\mu^{(2)}+u_\mu^{(3)}+\cdots+u_\mu^{(n-1)}+u_\mu^{(n)},\\
&\mu=1,2,\ldots,p,
\end{aligned}$$

mit den Grössen u verknüpft, und endlich deutet das Zeichen $\sum\limits_{\varepsilon}$ an, dass für $\substack{\nu=1,2,\ldots,n-1\\ \mu=1,2,\ldots,p}$ nach $\varepsilon_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis $s^{(\nu+1)}-1$ zu summiren ist.

2.

Setzt man in der Formel (Θ):

$$p^{(1)}=p^{(2)}=\cdots=p^{(n)}=1,$$

setzt gleichzeitig für $\mu=1,2,\ldots,p$:

$$u_\mu^{(1)}=w_\mu+c_\mu^{(1)},\quad u_\mu^{(2)}=w_\mu+c_\mu^{(2)},\quad\ldots,\quad u_\mu^{(n-1)}=w_\mu+c_\mu^{(n-1)},\quad u_\mu^{(n)}=w_\mu+c_\mu^{(n)},$$

indem man unter w_μ eine veränderliche Grösse, unter $c_\mu^{(1)}, c_\mu^{(2)}, \ldots, c_\mu^{(n)}$ beliebige Constanten versteht, und beachtet, dass alsdann:

$$v_\mu^{(1)}=d_\mu^{(1)}-c_\mu^{(2)},\quad v_\mu^{(2)}=d_\mu^{(2)}-2c_\mu^{(3)},\quad\ldots,\quad v_\mu^{(n-1)}=d_\mu^{(n-1)}-(n-1)c_\mu^{(n)},\quad v_\mu^{(n)}=nw_\mu+s_\mu$$

wird, wenn man zur Abkürzung für $\nu=1,2,\ldots,n-1$:

$$c_\mu^{(1)}+c_\mu^{(2)}+\cdots+c_\mu^{(\nu)}=d_\mu^{(\nu)},$$

dagegen:

$$c_\mu^{(1)} + c_\mu^{(2)} + \cdots + c_\mu^{(n)} = s_\mu$$

setzt, so geht aus der Formel (Θ) die Formel:

$$(\Pi) \qquad \vartheta(\!(w + c^{(1)})\!)_1 \vartheta(\!(w + c^{(2)})\!)_1 \ldots \vartheta(\!(w + c^{(n)})\!)_1 = \sum_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p}^{0, 1, \ldots, n-1} C_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\varkappa}{n} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(nw + s)\!)_n$$

hervor; dabei bezeichnet allgemein $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_m$ eine Thetafunction mit den Parametern $m a_{\mu\mu'}$ (μ, $\mu' = 1, 2, \ldots, p$), und es ist:

$$C_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} = \sum_\varepsilon \Bigg\{ \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma^{(1)}}{1.2} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(d^{(1)} - c^{(2)})\!)_{1.2}\, \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma^{(2)}}{2.3} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(d^{(2)} - 2c^{(3)})\!)_{2.3} \cdots$$

$$\cdots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma^{(n-2)}}{(n-2)(n-1)} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(d^{(n-2)} - \overline{n-2}\,c^{(n-1)})\!)_{(n-2)(n-1)}\, \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\sigma^{(n-2)}}{n-1} - \frac{\varkappa}{n} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(d^{(n-1)} - \overline{n-1}\,c^{(n)})\!)_{(n-1)n} \Bigg\},$$

wobei zur Abkürzung für $\begin{smallmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, n-2 \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{smallmatrix}$:

$$\varepsilon_\mu^{(1)} + 2\varepsilon_\mu^{(2)} + 3\varepsilon_\mu^{(3)} + \cdots + \nu\varepsilon_\mu^{(\nu)} = \sigma_\mu^{(\nu)}$$

gesetzt ist, und $\sum\limits_\varepsilon$ andeutet, dass für $\begin{smallmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, n-2 \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{smallmatrix}$ nach $\varepsilon_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis ν zu summiren ist. Man erkennt leicht, dass man diesen Ausdruck für $C_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}$ auch in die Gestalt:

$$C_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} = \sum_\eta \Bigg\{ \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\eta^{(1)}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(d^{(1)} - c^{(2)})\!)_{1.2}\, \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\eta^{(1)}}{2} - \frac{\eta^{(2)}}{3} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(d^{(2)} - 2c^{(3)})\!)_{2.3} \cdots$$

$$\cdots \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\eta^{(n-3)}}{n-2} - \frac{\eta^{(n-2)}}{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(d^{(n-2)} - \overline{n-2}\,c^{(n-1)})\!)_{(n-2)(n-1)}\, \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\eta^{(n-2)}}{n-1} - \frac{\varkappa}{n} \\ 0 \end{bmatrix} (\!(d^{(n-1)} - \overline{n-1}\,c^{(n)})\!)_{(n-1)n} \Bigg\}$$

bringen kann, wobei $\sum\limits_\eta$ andeutet, dass für $\begin{smallmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, n-2 \\ \mu = 1, 2, \ldots, p \end{smallmatrix}$ nach $\eta_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis ν zu summiren ist.

Aus der Formel (Π) erhält man durch passende Änderung der in ihr vorkommenden Variablen w die allgemeinere:

$$(\Pi') \qquad \vartheta \begin{bmatrix} g \\ \frac{h + \lambda}{n} \end{bmatrix} (\!(w + c^{(1)})\!)_1 \ldots \vartheta \begin{bmatrix} g \\ \frac{h + \lambda}{n} \end{bmatrix} (\!(w + c^{(n)})\!)_1 e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu \lambda_\mu}$$

$$= \sum_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p}^{0, 1, \ldots, n-1} C_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} \vartheta \begin{bmatrix} g + \frac{\varkappa}{n} \\ h \end{bmatrix} (\!(nw + s)\!)_n e^{\frac{2\pi i}{n} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \varkappa_\mu \lambda_\mu},$$

bei der g, h beliebige reelle Constanten, die λ irgend welche ganze Zahlen bezeichnen.

Versteht man jetzt unter $\dot{\varkappa}_1, \dot{\varkappa}_2, \ldots, \dot{\varkappa}_p$ irgend welche ganze Zahlen, multiplicirt linke und rechte Seite der Formel (Π') mit:

$$e^{-\frac{2\pi i}{n}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varkappa_\mu\lambda_\mu}$$

und summirt nach jedem λ von 0 bis $n-1$, so erhält man, wenn man schliesslich den Punkt auf den Buchstaben $\varkappa$ unterdrückt, die Formel:

$$(\bar{\Pi})\qquad n^p C_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}\,\vartheta\begin{bmatrix} g+\frac{\varkappa}{n}\\ h\end{bmatrix}(\!(nw+s)\!)_n$$
$$=\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{0,1,\ldots,n-1}\vartheta\begin{bmatrix} g\\ \frac{h+\lambda}{n}\end{bmatrix}(\!(w+c^{(1)})\!)_1\ldots\vartheta\begin{bmatrix} g\\ \frac{h+\lambda}{n}\end{bmatrix}(\!(w+c^{(n)})\!)_1\,e^{-\frac{2\pi i}{n}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(ng_\mu+\varkappa_\mu)\lambda_\mu}.$$

Die Formel $(\bar{\Pi})$ gibt zu folgender Bemerkung Anlass. Die rechte Seite der Formel (Π) ist ein linearer Ausdruck von n^p Thetafunctionen mit den Argumenten $nw_1+s_1\,|\ldots|\,nw_p+s_p$, dessen Coefficienten C von den Variablen w nicht abhängen. Ändert man die willkürlichen Constanten c, jedoch so, dass die mit:

$$s_1=c_1^{(1)}+c_1^{(2)}+\cdots+c_1^{(n)},\quad\ldots,\quad s_p=c_p^{(1)}+c_p^{(2)}+\cdots+c_p^{(n)}$$

bezeichneten Verbindungen derselben keine Änderung erleiden, so ändern sich auf der rechten Seite der Formel (Π) nur die Coefficienten C der n^p Thetafunctionen, während diese selbst völlig ungeändert bleiben. Nennt man daher allgemein ein Thetaproduct von der Form $\vartheta(\!(w+c^{(1)})\!)_1\vartheta(\!(w+c^{(2)})\!)_1\ldots\vartheta(\!(w+c^{(n)})\!)_1$, bei dem für $\mu=1,2,\ldots,p$ $c_\mu^{(1)}+c_\mu^{(2)}+\cdots+c_\mu^{(n)}=s_\mu$ ist, ein zu dem Constantensysteme $s_1\,|\ldots|\,s_p$ gehöriges n-gliedriges Thetaproduct mit den Variablen $w_1\,|\ldots|\,w_p$, so ergibt sich aus der Formel (Π) unter Beachtung, dass zwischen n^p+1 linearen Formen von n^p Variablen immer eine lineare Relation mit constanten Coefficienten besteht, der folgende Satz:

Zwischen n^p+1 zu demselben Constantensysteme $s_1\,|\ldots|\,s_p$ gehörigen n-gliedrigen Thetaproducten mit den Variablen $w_1\,|\ldots|\,w_p$ besteht immer eine lineare Relation mit in Bezug auf die Variablen w constanten Coefficienten.

3.

Man setze jetzt in den Formeln (Π), (Π'), $(\bar{\Pi})$ sämmtliche Grössen c der Null gleich und bezeichne die neue Grösse, in welche alsdann $C_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}$ übergeht, mit $K_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}$. Die Formel (Π) geht dadurch in die Formel:

$$(\Pi_0)\qquad \vartheta^n(\!(w)\!)_1=\sum_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p}^{0,1,\ldots,n-1}K_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varkappa}{n}\\ 0\end{bmatrix}(\!(nw)\!)_n$$

über, und es ist dabei:

$$K_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}=\sum_{\varepsilon}\left\{\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\sigma^{(1)}}{1.2}\\ 0\end{bmatrix}(\!(0)\!)_{1.2}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\sigma^{(2)}}{2.3}\\ 0\end{bmatrix}(\!(0)\!)_{2.3}\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\sigma^{(n-2)}}{(n-2)(n-1)}\\ 0\end{bmatrix}(\!(0)\!)_{(n-2)(n-1)}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\sigma^{(n-2)}}{n-1}-\frac{\varkappa}{n}\\ 0\end{bmatrix}(\!(0)\!)_{(n-1)n}\right\},$$

wobei zur Abkürzung für ${}_{\mu=1,2,\ldots,p}^{\nu=1,2,\ldots,n-2}$:

$$\varepsilon_\mu^{(1)} + 2\varepsilon_\mu^{(2)} + 3\varepsilon_\mu^{(3)} + \cdots + \nu\varepsilon_\mu^{(\nu)} = \sigma_\mu^{(\nu)}$$

gesetzt ist, und $\sum\limits_\varepsilon$ andeutet, dass für ${}_{\mu=1,2,\ldots,p}^{\nu=1,2,\ldots,n-2}$ nach $\varepsilon_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis ν zu summiren ist; oder in anderer Form:

$$K_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p} = \sum_\eta \left\{ \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\eta^{(1)}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}(\!(0)\!)_{1.2}\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{\eta^{(1)}}{2} - \frac{\eta^{(2)}}{3} \\ 0 \end{bmatrix}(\!(0)\!)_{2.3}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\vartheta\begin{bmatrix} \frac{\eta^{(n-3)}}{n-2} - \frac{\eta^{(n-2)}}{n-1} \\ 0 \end{bmatrix}(\!(0)\!)_{(n-2)(n-1)}\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{\eta^{(n-2)}}{n-1} - \frac{\varkappa}{n} \\ 0 \end{bmatrix}(\!(0)\!)_{(n-1)n}\right\},$$

wobei $\sum\limits_\eta$ andeutet, dass für ${}_{\mu=1,2,\ldots,p}^{\nu=1,2,\ldots,n-2}$ nach $\eta_\mu^{(\nu)}$ von 0 bis ν zu summiren ist.

Es geht weiter aus der Formel (Π'), wenn man darin noch für $\mu=1,2,\ldots,p$ die Grösse h_μ jetzt mit nh_μ bezeichnet und alle Zahlen λ der Null gleich setzt, die Formel:

$$(\Pi_0') \qquad \vartheta^n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(w)\!)_1 = \sum_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p}^{0,1,\ldots,n-1} K_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}\,\vartheta\begin{bmatrix} g + \frac{\varkappa}{n} \\ nh \end{bmatrix}(\!(nw)\!)_n$$

hervor, bei der die g, h beliebige reelle Constanten bezeichnen.

Es geht endlich die Formel $(\overline{\Pi})$, wenn man darin noch für $\mu = 1,2,\ldots,p$ g_μ durch $g_\mu - \frac{\varkappa_\mu}{n}$ ersetzt, in die Formel:

$$(\overline{\Pi}_0) \qquad n^p K_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(nw)\!)_n = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{0,1,\ldots,n-1} \vartheta^n\begin{bmatrix} g - \frac{\varkappa}{n} \\ \frac{h+\lambda}{n} \end{bmatrix}(\!(w)\!)_1\, e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu \lambda_\mu}$$

über, bei der die g, h beliebige reelle Constanten, die $\varkappa$ irgend welche ganze Zahlen bezeichnen.

Die vorstehenden Formeln sind für die im zweiten Theile dieser Arbeit zu entwickelnde Transformationstheorie von besonderer Bedeutung, und es wird dort Anlass sein, auf dieselben zurückzukommen.

Fünfter Abschnitt.

Zweite Specialisirung der Fundamentalformel.

1.

Anknüpfend an die Untersuchungen des zweiten Abschnitts kann man weiter das folgende Resultat aussprechen.

Die Form:

$$A = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} (q^{(1)} x_\mu^{(1)} x_{\mu'}^{(1)} + q^{(2)} x_\mu^{(2)} x_{\mu'}^{(2)} + \cdots + q^{(n)} x_\mu^{(n)} x_{\mu'}^{(n)}),$$

bei der die q irgend welche positive rationale Zahlen bezeichnen sollen, geht durch Anwendung der Substitution:

$$(S) \qquad \left.\begin{array}{llll} s x_\mu^{(1)} = (2q^{(1)} - s) y_\mu^{(1)} + & 2q^{(2)} y_\mu^{(2)} + \cdots + & 2q^{(n)} y_\mu^{(n)}, \\ s x_\mu^{(2)} = \quad 2q^{(1)} y_\mu^{(1)} + & (2q^{(2)} - s) y_\mu^{(2)} + \cdots + & 2q^{(n)} y_\mu^{(n)}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ s x_\mu^{(n)} = \quad 2q^{(1)} y_\mu^{(1)} + & 2q^{(2)} y_\mu^{(2)} + \cdots + & (2q^{(n)} - s) y_\mu^{(n)}, \end{array}\right\} (S_\mu)$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

wobei:

$$q^{(1)} + q^{(2)} + \cdots + q^{(n)} = s$$

gesetzt ist, über in die Form:

$$B = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} (q^{(1)} y_\mu^{(1)} y_{\mu'}^{(1)} + q^{(2)} y_\mu^{(2)} y_{\mu'}^{(2)} + \cdots + q^{(n)} y_\mu^{(n)} y_{\mu'}^{(n)}).$$

Unter der Voraussetzung, dass die Grössen $a_{\mu\mu'}$ den für Parameter von Thetafunctionen bestehenden Bedingungen genügen, die q aber positive ganze Zahlen ohne einen allen gemeinsamen Theiler sind, soll jetzt diejenige Thetaformel, welche der Überführung der Form A in die Form B durch die Substitution (S) entspricht, aus der in Art. 1 des dritten Abschnitts aufgestellten Fundamentalformel (Θ) abgeleitet werden.

Zu dem Ende hat man die in der Formel (Θ) vorkommenden Grössen $a_{\mu\mu'}^{(1)}, \ldots, a_{\mu\mu'}^{(n)}, b_{\mu\mu'}^{(1)}, \ldots, b_{\mu\mu'}^{(n)}$ $(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$ in die Coefficienten der soeben aufgestellten Formen A, B und zugleich die der Formel (Θ) zu Grunde liegende allgemeine Substitution (S) in die hier vorliegende specielle Substitution (S) übergehen zu lassen. Man erhält dann die gewünschte Thetaformel zunächst in der Gestalt:

$$s^{np}\bar{s}\,\vartheta(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}}\,\vartheta(\!(u^{(2)})\!)_{a^{(2)}}\cdots\vartheta(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}}$$

$$=\sum_{\alpha}^{0,1,\ldots,s^n-1}\;\sum_{\beta}^{0,1,\ldots,s-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\bar{\bar{\alpha}}^{(1)}}{\varDelta}\\ \frac{\bar{\beta}^{(1)}}{s}\end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)_{a^{(1)}}\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\bar{\bar{\alpha}}^{(2)}}{\varDelta}\\ \frac{\bar{\beta}^{(2)}}{s}\end{bmatrix}(\!(v^{(2)})\!)_{a^{(2)}}\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\bar{\bar{\alpha}}^{(n)}}{\varDelta}\\ \frac{\bar{\beta}^{(n)}}{s}\end{bmatrix}(\!(v^{(n)})\!)_{a^{(n)}};$$

dabei ist zur Abkürzung:

$$(-1)^{n-1}s^n=\varDelta$$

gesetzt, das Zeichen $\overset{0,1,\ldots,s^n-1}{\underset{\alpha}{\Sigma}}$ deutet an, dass nach jedem der np in den linearen Formen:

$$\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(1)}=\frac{2\varDelta}{s}\left(q^{(1)}\alpha_\mu^{(1)}+q^{(2)}\alpha_\mu^{(2)}+\cdots+q^{(n)}\alpha_\mu^{(n)}\right)-\varDelta\alpha_\mu^{(1)},$$
$$\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(2)}=\frac{2\varDelta}{s}\left(q^{(1)}\alpha_\mu^{(1)}+q^{(2)}\alpha_\mu^{(2)}+\cdots+q^{(n)}\alpha_\mu^{(n)}\right)-\varDelta\alpha_\mu^{(2)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\bar{\bar{\alpha}}_\mu^{(n)}=\frac{2\varDelta}{s}\left(q^{(1)}\alpha_\mu^{(1)}+q^{(2)}\alpha_\mu^{(2)}+\cdots+q^{(n)}\alpha_\mu^{(n)}\right)-\varDelta\alpha_\mu^{(n)},$$
$$\mu=1,2,\ldots,p,$$

vorkommenden α von 0 bis s^n-1 zu summiren ist, entsprechend deutet das Zeichen $\overset{0,1,\ldots,s-1}{\underset{\beta}{\Sigma}}$ an, dass nach jedem der np in den linearen Formen:

$$\bar{\beta}_\mu^{(1)}=2q^{(1)}\left(\beta_\mu^{(1)}+\beta_\mu^{(2)}+\cdots+\beta_\mu^{(n)}\right)-s\beta_\mu^{(1)},$$
$$\bar{\beta}_\mu^{(2)}=2q^{(2)}\left(\beta_\mu^{(1)}+\beta_\mu^{(2)}+\cdots+\beta_\mu^{(n)}\right)-s\beta_\mu^{(2)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\bar{\beta}_\mu^{(n)}=2q^{(n)}\left(\beta_\mu^{(1)}+\beta_\mu^{(2)}+\cdots+\beta_\mu^{(n)}\right)-s\beta_\mu^{(n)},$$
$$\mu=1,2,\ldots,p,$$

vorkommenden β von 0 bis $s-1$ zu summiren ist, und endlich bezeichnet $\bar{s}$ die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$\frac{\varDelta}{s}\left[(2q^{(1)}-s)x^{(1)}+2q^{(2)}x^{(2)}+\cdots+2q^{(n)}x^{(n)}\right]\equiv 0\ (\text{mod. }\varDelta),$$
$$\frac{\varDelta}{s}\left[2q^{(1)}x^{(1)}+(2q^{(2)}-s)x^{(2)}+\cdots+2q^{(n)}x^{(n)}\right]\equiv 0\ (\text{mod. }\varDelta),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\varDelta}{s}\left[2q^{(1)}x^{(1)}+2q^{(2)}x^{(2)}+\cdots+(2q^{(n)}-s)x^{(n)}\right]\equiv 0\ (\text{mod. }\varDelta).$$

Unter Berücksichtigung, dass die soeben genannte Zahl $\bar{s}$ den Werth:

$$\bar{s}=\frac{3+(-1)^s}{2}s^{n^2-1}$$

besitzt, und durch mehrfache leicht ersichtliche Umformungen*) kann man aber die gewonnene Thetaformel in die reducirte Gestalt:

*) Man vergl. hierzu den Art. 2 der Abhandlung: Krazer und Prym, Über die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel (Acta mathematica, Bd. 3, pag. 240), wo diese Umformungen in einem speciellen Falle vollständig durchgeführt sind.

$$(\Theta)\quad \left(\frac{3+(-1)^s}{2}\right)^p s^p \vartheta(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}} \vartheta(\!(u^{(2)})\!)_{a^{(2)}} \cdots \vartheta(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,s-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{2\alpha}{s} \\ \frac{2q^{(1)}\beta}{s} \end{bmatrix} (\!(v^{(1)})\!)_{a^{(1)}} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{2\alpha}{s} \\ \frac{2q^{(2)}\beta}{s} \end{bmatrix} (\!(v^{(2)})\!)_{a^{(2)}} \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{2\alpha}{s} \\ \frac{2q^{(n)}\beta}{s} \end{bmatrix} (\!(v^{(n)})\!)_{a^{(n)}} e^{-\frac{4\pi i}{s}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\alpha_\mu\beta_\mu}$$

bringen. In dieser Formel bezeichnen also $q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(n)}$ positive ganze Zahlen ohne einen allen gemeinsamen Factor, auch ist zur Abkürzung $q^{(1)}+q^{(2)}+\cdots+q^{(n)}=s$ gesetzt. Ferner ist für $\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p$:

$$a^{(1)}_{\mu\mu'} = q^{(1)}a_{\mu\mu'}, \quad a^{(2)}_{\mu\mu'} = q^{(2)}a_{\mu\mu'}, \quad \ldots, \quad a^{(n)}_{\mu\mu'} = q^{(n)}a_{\mu\mu'};$$

weiter sind die Grössen u, v durch das involutorische Gleichungensystem:

$$\begin{aligned}
sv^{(1)}_\mu &= (2q^{(1)}-s)u^{(1)}_\mu + 2q^{(1)}u^{(2)}_\mu + \cdots + 2q^{(1)}u^{(n)}_\mu, \\
sv^{(2)}_\mu &= 2q^{(2)}u^{(1)}_\mu + (2q^{(2)}-s)u^{(2)}_\mu + \cdots + 2q^{(2)}u^{(n)}_\mu, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
sv^{(n)}_\mu &= 2q^{(n)}u^{(1)}_\mu + 2q^{(n)}u^{(2)}_\mu + \cdots + (2q^{(n)}-s)u^{(n)}_\mu, \\
&\mu = 1, 2, \ldots, p,
\end{aligned}$$

verknüpft, und endlich deutet das Zeichen $\sum\limits_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,s-1}$ an, dass für $\mu = 1, 2, \ldots, p$ sowohl nach α_μ wie nach β_μ von 0 bis $s-1$ zu summiren ist.

2.

Aus der gewonnenen Formel (Θ) erhält man durch passende Änderung der in ihr vorkommenden Variablen u, v die allgemeinere:

$$(\Theta')\quad \left(\frac{3+(-1)^s}{2}\right)^p s^p \vartheta\begin{bmatrix} \frac{2\gamma}{s}+\varkappa^{(1)} \\ \frac{2q^{(1)}\delta}{s}+\lambda^{(1)} \end{bmatrix} (\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}} \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{2\gamma}{s}+\varkappa^{(n)} \\ \frac{2q^{(n)}\delta}{s}+\lambda^{(n)} \end{bmatrix} (\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}} e^{\varphi}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,s-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{2(\alpha+\bar{\bar{\varkappa}})}{s}-\varkappa^{(1)} \\ \frac{2q^{(1)}(\beta+\bar{\lambda})}{s}-\lambda^{(1)} \end{bmatrix} (\!(v^{(1)})\!)_{a^{(1)}} \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{2(\alpha+\bar{\bar{\varkappa}})}{s}-\varkappa^{(n)} \\ \frac{2q^{(n)}(\beta+\bar{\lambda})}{s}-\lambda^{(n)} \end{bmatrix} (\!(v^{(n)})\!)_{a^{(n)}} e^{\psi}$$

$$\times e^{\frac{4\pi i}{s}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}(\alpha_\mu\delta_\mu-\beta_\mu\gamma_\mu)},$$

wobei:

$$\varphi = -\frac{4\pi i}{s}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}(\gamma_\mu+\bar{\bar{\varkappa}}_\mu)\delta_\mu, \qquad \psi = -\frac{4\pi i}{s}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}(\alpha_\mu+\bar{\bar{\varkappa}}_\mu)\beta_\mu$$

ist, ferner $\varkappa^{(\nu)}_\mu$, $\lambda^{(\nu)}_\mu$ $\left(\begin{smallmatrix}\nu=1,2,\ldots,n\\ \mu=1,2,\ldots,p\end{smallmatrix}\right)$ $2np$ beliebige reelle Grössen, γ_μ, δ_μ $(\mu=1,2,\ldots,p)$ irgend $2p$ ganze Zahlen bezeichnen, und zur Abkürzung für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$q^{(1)}\varkappa^{(1)}_\mu + q^{(2)}\varkappa^{(2)}_\mu + \cdots + q^{(n)}\varkappa^{(n)}_\mu = \bar{\bar{\varkappa}}_\mu, \quad \lambda^{(1)}_\mu + \lambda^{(2)}_\mu + \cdots + \lambda^{(n)}_\mu = \bar{\lambda}_\mu$$

gesetzt ist.

Es soll jetzt der Fall, wo die ganze Zahl s ungerade ist, von dem Falle, wo s gerade ist, getrennt werden. Ist:

$$s \text{ eine ungerade Zahl, } s = 2s' - 1,$$

so kann man die Formel (Θ') in die Gestalt:

$$(\Theta_1')_{s=2s'-1} \quad s^p \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\gamma}{s} + \varkappa^{(1)} \\ \frac{q^{(1)}\delta}{s} + \lambda^{(1)} \end{bmatrix}(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}} \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\gamma}{s} + \varkappa^{(n)} \\ \frac{q^{(n)}\delta}{s} + \lambda^{(n)} \end{bmatrix}(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}} e^{\varphi_1}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,s-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\alpha + 2\bar{\bar{\varkappa}}}{s} - \varkappa^{(1)} \\ \frac{q^{(1)}(\beta + 2\bar{\lambda})}{s} - \lambda^{(1)} \end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)_{a^{(1)}} \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\alpha + 2\bar{\bar{\varkappa}}}{s} - \varkappa^{(n)} \\ \frac{q^{(n)}(\beta + 2\bar{\lambda})}{s} - \lambda^{(n)} \end{bmatrix}(\!(v^{(n)})\!)_{a^{(n)}} e^{\psi_1}$$

$$\times e^{-\frac{s-1}{s}\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\alpha_\mu \delta_\mu - \beta_\mu \gamma_\mu)},$$

wobei:

$$\varphi_1 = \frac{s-1}{s}\pi i \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \gamma_\mu \delta_\mu - \frac{2\pi i}{s}\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \bar{\bar{\varkappa}}_\mu \delta_\mu, \quad \psi_1 = \frac{s-1}{s}\pi i \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \alpha_\mu \beta_\mu - \frac{2\pi i}{s}\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \bar{\bar{\varkappa}}_\mu \beta_\mu$$

ist, bringen. Ist dagegen:

$$s \text{ eine gerade Zahl, } s = 2s',$$

so kann man die Formel (Θ') in die Gestalt:

$$(\Theta_2')_{s=2s'} \quad s'^p \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\gamma}{s'} + \varkappa^{(1)} \\ \frac{q^{(1)}\delta}{s'} + \lambda^{(1)} \end{bmatrix}(\!(u^{(1)})\!)_{a^{(1)}} \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\gamma}{s'} + \varkappa^{(n)} \\ \frac{q^{(n)}\delta}{s'} + \lambda^{(n)} \end{bmatrix}(\!(u^{(n)})\!)_{a^{(n)}} e^{\varphi_2}$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}^{0,1,\ldots,s'-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\alpha + \bar{\bar{\varkappa}}}{s'} - \varkappa^{(1)} \\ \frac{q^{(1)}(\beta + \bar{\lambda})}{s'} - \lambda^{(1)} \end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)_{a^{(1)}} \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\alpha + \bar{\bar{\varkappa}}}{s'} - \varkappa^{(n)} \\ \frac{q^{(n)}(\beta + \bar{\lambda})}{s'} - \lambda^{(n)} \end{bmatrix}(\!(v^{(n)})\!)_{a^{(n)}} e^{\psi_2}$$

$$\times e^{\frac{2\pi i}{s'} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\alpha_\mu \delta_\mu - \beta_\mu \gamma_\mu)},$$

wobei:

$$\varphi_2 = -\frac{2\pi i}{s'}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}(\gamma_\mu + \bar{\bar{\varkappa}}_\mu)\delta_\mu, \quad \psi_2 = -\frac{2\pi i}{s'}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}(\alpha_\mu + \bar{\bar{\varkappa}}_\mu)\beta_\mu$$

ist, bringen.

Setzt man in den Formeln (Θ'), (Θ_1'), (Θ_2') die Grössen γ, δ, $\varkappa$, λ sämmtlich der Null gleich, so geht die Formel (Θ') in die Formel (Θ) des vorigen Artikels über, und entsprechend verwandeln sich die Formeln (Θ_1'), (Θ_2') in diejenigen Formeln, welche man erhalten würde, wenn man die beiden aus (Θ) durch Trennung des Falles, wo s ungerade, von dem Falle, wo s gerade ist, hervorgehenden Formeln in die einfachste Gestalt brächte.

3.

Zum Schlusse dieses Abschnittes sollen jetzt noch die aus den Formeln (Θ'), (Θ_1'), (Θ_2') für $q^{(1)}=q^{(2)}=\cdots=q^{(n)}=1$ hervorgehenden, im Späteren zur Verwendung kommenden speciellen Formeln unter gleichzeitiger Einführung einer übersichtlicheren Bezeichnung aufgestellt werden.

Es geht zunächst die Formel (Θ') in die Formel:

$$(\bar{\Theta}')\qquad \left(\frac{3+(-1)^r}{2}\right)^p r^p\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2\eta}{r}+\varkappa^{(1)}\\ \frac{2\eta'}{r}+\varkappa'^{(1)}\end{bmatrix}(\!(u^{(1)})\!)_a\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2\eta}{r}+\varkappa^{(r)}\\ \frac{2\eta'}{r}+\varkappa'^{(r)}\end{bmatrix}(\!(u^{(r)})\!)_a\,e^{-\frac{4\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\eta_\mu+\bar{\varkappa}_\mu)\eta'_\mu}$$

$$=\sum_{\varepsilon,\varepsilon'}^{0,1,\ldots,r-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2(\varepsilon+\bar{\varkappa})}{r}-\varkappa^{(1)}\\ \frac{2(\varepsilon'+\bar{\varkappa}')}{r}-\varkappa'^{(1)}\end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)_a\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2(\varepsilon+\bar{\varkappa})}{r}-\varkappa^{(r)}\\ \frac{2(\varepsilon'+\bar{\varkappa}')}{r}-\varkappa'^{(r)}\end{bmatrix}(\!(v^{(r)})\!)_a\,e^{-\frac{4\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu+\bar{\varkappa}_\mu)\varepsilon'_\mu}$$

$$\times\, e^{\frac{4\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\eta'_\mu-\varepsilon'_\mu\eta_\mu)}$$

über, bei der r irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet, und die Grössen u, v durch das involutorische orthogonale Gleichungensystem:

$$\begin{aligned} r v_\mu^{(1)} &= (2-r)u_\mu^{(1)} + 2u_\mu^{(2)} + \cdots + 2u_\mu^{(r)},\\ r v_\mu^{(2)} &= 2u_\mu^{(1)} + (2-r)u_\mu^{(2)} + \cdots + 2u_\mu^{(r)},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r v_\mu^{(r)} &= 2u_\mu^{(1)} + 2u_\mu^{(2)} + \cdots + (2-r)u_\mu^{(r)},\\ &\mu = 1, 2, \ldots, p, \end{aligned}$$

verknüpft sind.

Es geht weiter die Formel (Θ_1') in die Formel:

$$(\bar{\Theta}_1')_{r=2r'-1}\qquad r^p\,\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta}{r}+\varkappa^{(1)}\\ \frac{\eta'}{r}+\varkappa'^{(1)}\end{bmatrix}(\!(u^{(1)})\!)_a\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\eta}{r}+\varkappa^{(r)}\\ \frac{\eta'}{r}+\varkappa'^{(r)}\end{bmatrix}(\!(u^{(r)})\!)_a\,e^{\frac{r-1}{r}\pi i\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\eta_\mu\eta'_\mu-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\bar{\varkappa}_\mu\eta'_\mu}$$

$$=\sum_{\varepsilon,\varepsilon'}^{0,1,\ldots,r-1}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon+2\bar{\varkappa}}{r}-\varkappa^{(1)}\\ \frac{\varepsilon'+2\bar{\varkappa}'}{r}-\varkappa'^{(1)}\end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)_a\cdots\vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon+2\bar{\varkappa}}{r}-\varkappa^{(r)}\\ \frac{\varepsilon'+2\bar{\varkappa}'}{r}-\varkappa'^{(r)}\end{bmatrix}(\!(v^{(r)})\!)_a\,e^{\frac{r-1}{r}\pi i\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu\varepsilon'_\mu-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\bar{\varkappa}_\mu\varepsilon'_\mu}$$

$$\times\, e^{-\frac{r-1}{r}\pi i\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu\eta'_\mu-\varepsilon'_\mu\eta_\mu)}$$

über, bei der $r=2r'-1$ irgend eine positive ungerade Zahl bezeichnet, und die Grössen u, v durch das involutorische orthogonale Gleichungensystem:

$$\begin{aligned} r v_\mu^{(1)} &= (2-r)u_\mu^{(1)} + 2u_\mu^{(2)} + \cdots + 2u_\mu^{(r)},\\ r v_\mu^{(2)} &= 2u_\mu^{(1)} + (2-r)u_\mu^{(2)} + \cdots + 2u_\mu^{(r)},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r v_\mu^{(r)} &= 2u_\mu^{(1)} + 2u_\mu^{(2)} + \cdots + (2-r)u_\mu^{(r)},\\ &\mu = 1, 2, \ldots, p, \end{aligned}$$

verknüpft sind.

Es geht endlich die Formel (Θ_2') in die Formel:

$$(\overline{\Theta_2'})_{r=2r'} \qquad r'^p \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\eta}{r'} + \varkappa^{(1)} \\ \frac{\eta'}{r'} + \varkappa'^{(1)} \end{bmatrix}(\!(u^{(1)})\!)_a \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\eta}{r'} + \varkappa^{(2r')} \\ \frac{\eta'}{r'} + \varkappa'^{(2r')} \end{bmatrix}(\!(u^{(2r')})\!)_a \, e^{-\frac{2\pi i}{r'}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\eta_\mu + \bar{\varkappa}_\mu)\eta'_\mu}$$

$$= \sum_{\varepsilon, \varepsilon'}^{0,1,\ldots,r'-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon + \bar{\varkappa}}{r'} - \varkappa^{(1)} \\ \frac{\varepsilon' + \bar{\varkappa}'}{r'} - \varkappa'^{(1)} \end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)_a \cdots \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon + \bar{\varkappa}}{r'} - \varkappa^{(2r')} \\ \frac{\varepsilon' + \bar{\varkappa}'}{r'} - \varkappa'^{(2r')} \end{bmatrix}(\!(v^{(2r')})\!)_a \, e^{-\frac{2\pi i}{r'}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu + \bar{\varkappa}_\mu)\varepsilon'_\mu}$$

$$\times e^{\frac{2\pi i}{r'}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(\varepsilon_\mu \eta'_\mu - \varepsilon'_\mu \eta_\mu)}$$

über, bei der $r = 2r'$ irgend eine positive gerade Zahl bezeichnet, und die Grössen u, v durch das involutorische orthogonale Gleichungensystem:

$$\begin{aligned} r' v_\mu^{(1)} &= (1 - r')u_\mu^{(1)} + u_\mu^{(2)} + \cdots + u_\mu^{(2r')}, \\ r' v_\mu^{(2)} &= u_\mu^{(1)} + (1 - r')u_\mu^{(2)} + \cdots + u_\mu^{(2r')}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r' v_\mu^{(2r')} &= u_\mu^{(1)} + u_\mu^{(2)} + \cdots + (1 - r')\, u_\mu^{(2r')}, \\ &\mu = 1, 2, \ldots, p, \end{aligned}$$

verknüpft sind.

Bei einer jeden der drei Formeln $(\overline{\Theta}')$, $(\overline{\Theta}_1')$, $(\overline{\Theta}_2')$ sind unter η_μ, η'_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ irgend welche ganze Zahlen, unter $\varkappa_\mu^{(\nu)}$, $\varkappa_\mu'^{(\nu)}$ $\left(\begin{smallmatrix}\nu = 1, 2, \ldots, r \\ \mu = 1, 2, \ldots, p\end{smallmatrix}\right)$ irgend welche reelle Grössen zu verstehen, während die Grössen $\bar{\varkappa}_\mu$, $\bar{\varkappa}'_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ durch die Gleichungen:

$$\bar{\varkappa}_\mu = \varkappa_\mu^{(1)} + \varkappa_\mu^{(2)} + \cdots + \varkappa_\mu^{(r)}, \qquad \bar{\varkappa}'_\mu = \varkappa_\mu'^{(1)} + \varkappa_\mu'^{(2)} + \cdots + \varkappa_\mu'^{(r)}$$

definirt sind.

Die Formeln $(\overline{\Theta}_1')$, $(\overline{\Theta}_2')$ stimmen, von den Grössen $\varkappa$, $\varkappa'$ abgesehen, mit den in der Abhandlung: „Über die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel"*) aufgestellten Formeln (Θ_1'), (Θ_2') überein.

*) Acta mathematica, Bd 3, pag. 240.

Sechster Abschnitt.

Aufstellung einiger für die Theorie der Thetafunctionen wichtigen orthogonalen Gleichungensysteme.

1.

Soll die Form:

$$X = x^{(1)^2} + x^{(2)^2} + \cdots + x^{(n)^2}$$

durch die Substitution:

$$(O) \qquad \begin{aligned} rx^{(1)} &= c^{(11)}y^{(1)} + c^{(12)}y^{(2)} + \cdots + c^{(1n)}y^{(n)}, \\ rx^{(2)} &= c^{(21)}y^{(1)} + c^{(22)}y^{(2)} + \cdots + c^{(2n)}y^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ rx^{(n)} &= c^{(n1)}y^{(1)} + c^{(n2)}y^{(2)} + \cdots + c^{(nn)}y^{(n)}, \end{aligned}$$

bei der r eine positive ganze Zahl, die c ganze Zahlen bezeichnen mögen, in die Form:

$$Y = y^{(1)^2} + y^{(2)^2} + \cdots + y^{(n)^2}$$

übergehen, so müssen zwischen den Zahlen c, r die $\frac{1}{2}n(n+1)$ Relationen:

$$(o) \qquad c^{(1\sigma)}c^{(1\sigma')} + c^{(2\sigma)}c^{(2\sigma')} + \cdots + c^{(n\sigma)}c^{(n\sigma')} = \begin{matrix} r^2, \text{ wenn } \sigma' = \sigma, \\ 0, \text{ wenn } \sigma' \gtrless \sigma, \end{matrix} \qquad (\sigma, \sigma' = 1, 2, \ldots, n)$$

oder auch die damit äquivalenten:

$$(o') \qquad c^{(\varrho 1)}c^{(\varrho' 1)} + c^{(\varrho 2)}c^{(\varrho' 2)} + \cdots + c^{(\varrho n)}c^{(\varrho' n)} = \begin{matrix} r^2, \text{ wenn } \varrho' = \varrho, \\ 0, \text{ wenn } \varrho' \gtrless \varrho, \end{matrix} \qquad (\varrho, \varrho' = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen. Unter Anwendung der Relationen (o) erhält man dann ohne Mühe die Auflösung des Gleichungensystems (O) nach den Grössen y als Unbekannten in der Gestalt:

$$(O') \qquad \begin{aligned} ry^{(1)} &= c^{(11)}x^{(1)} + c^{(21)}x^{(2)} + \cdots + c^{(n1)}x^{(n)}, \\ ry^{(2)} &= c^{(12)}x^{(1)} + c^{(22)}x^{(2)} + \cdots + c^{(n2)}x^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ ry^{(n)} &= c^{(1n)}x^{(1)} + c^{(2n)}x^{(2)} + \cdots + c^{(nn)}x^{(n)}. \end{aligned}$$

Die Gleichungensysteme (O), (O') mögen orthogonale genannt werden.

In diesem Abschnitte soll die Aufgabe behandelt werden, bei gegebenem r die c als ganze Zahlen so zu bestimmen, dass sie den Gleichungen (o), (o') genügen. Zunächst wird der Fall $r = 2$ erledigt werden. Die darauf bezügliche im nächsten Artikel folgende Untersuchung wird zeigen, dass es möglich ist, in diesem Falle alle

überhaupt existirenden Substitutionen (O) anzugeben; es wird sich zugleich aber auch ein allgemeines Princip ergeben, um für beliebiges r ebenso charakteristische Substitutionen (O) aufzustellen, wie die im Falle $r = 2$ erhaltenen es sind.

2.

Die Aufstellung der dem Falle $r = 2$ entsprechenden Substitutionen (O) erfordert die Lösung der folgenden Aufgabe. Es sollen die positive ganze Zahl n und die n^2 ganzen Zahlen c so bestimmt werden, dass für jedes σ und σ' von 1 bis n die Relationen:

$$(o) \qquad c^{(1\sigma)}c^{(1\sigma')} + c^{(2\sigma)}c^{(2\sigma')} + \cdots + c^{(n\sigma)}c^{(n\sigma')} = \begin{matrix} 4, & \text{wenn } \sigma' = \sigma, \\ 0, & \text{wenn } \sigma' \gtrless \sigma, \end{matrix}$$

oder, was dasselbe, für jedes ϱ und ϱ' von 1 bis n die Relationen:

$$(o') \qquad c^{(\varrho 1)}c^{(\varrho' 1)} + c^{(\varrho 2)}c^{(\varrho' 2)} + \cdots + c^{(\varrho n)}c^{(\varrho' n)} = \begin{matrix} 4, & \text{wenn } \varrho' = \varrho, \\ 0, & \text{wenn } \varrho' \gtrless \varrho, \end{matrix}$$

erfüllt sind. Man findet, dass zunächst eine Reihe von Systemen desselben Typus existirt, welche zu den Werthen $n = 4, 6, 8, 10, \ldots$ gehören. Denkt man sich die n^2 Grössen c in der durch das Gleichungensystem (O) bestimmten quadratischen Anordnung geschrieben und setzt der Einfachheit halber an Stelle der auftretenden Zahlen $+1$, -1 nur die Vorzeichen $+$, $-$ beziehlich, so werden die zu den Werthen $n = 4$, 6, 8 gehörigen Systeme durch die hier folgenden vorderen drei Schemata vollständig dargestellt, während das vierte Schema das einer beliebigen geraden Zahl $n = 2m$ entsprechende System versinnlicht, wenn man sich noch die in den fixirten Horizontalreihen offenen Plätze mit der Null besetzt denkt.

$n = 4$

+	+	+	−
+	+	−	+
+	−	+	+
−	+	+	+

$n = 6$

+	+	0	0	+	−
+	+	0	0	−	+
+	−	+	+	0	0
−	+	+	+	0	0
0	0	+	−	+	+
0	0	−	+	+	+

$n = 8$

+	+	0	0	0	0	+	−
+	+	0	0	0	0	−	+
+	−	+	+	0	0	0	0
−	+	+	+	0	0	0	0
0	0	+	−	+	+	0	0
0	0	−	+	+	+	0	0
0	0	0	0	+	−	+	+
0	0	0	0	−	+	+	+

$n = 2m$

+	+										+	−
+	+										−	+
+	−	+	+									
−	+	+	+									
		+	−	+	+							
		−	+	+	+							
							+	−	+	+		
							−	+	+	+		
									+	−	+	+
									−	+	+	+

Ausser diesen regulären Systemen ergeben sich merkwürdiger Weise noch zwei isolirt stehende Systeme, von denen das eine zum Werthe $n = 7$, das andere zum Werthe $n = 8$ gehört, und die durch die Schemata:

+	+	+	+	0	0	0
+	−	0	0	+	+	0
+	0	−	0	−	0	+
+	0	0	−	0	−	−
0	+	−	0	0	+	−
0	+	0	−	+	0	+
0	0	+	−	−	+	0

+	+	+	+	0	0	0	0
+	−	0	0	+	+	0	0
+	0	−	0	−	0	+	0
+	0	0	−	0	−	−	0
0	+	−	0	+	0	0	+
0	+	0	−	0	+	0	−
0	0	+	−	0	0	+	+
0	0	0	0	+	−	+	−

repräsentirt werden. Betrachtet man zwei orthogonale Systeme, von denen das eine aus dem anderen dadurch hervorgeht, dass man seine Horizontalreihen oder seine Verticalreihen in irgend einer Weise umstellt, oder dadurch, dass man die sämmtlichen Elemente irgend welcher seiner Horizontalreihen oder irgend welcher seiner Verticalreihen mit -1 multiplicirt, als nicht verschieden und schliesst zerfallende*) Systeme aus, so sind mit den vorstehenden alle möglichen verschiedenen zur Zahl $r = 2$ gehörigen orthogonalen Systeme erschöpft.

3.

Dem durch das obige zur Zahl $n = 2m$ gehörige Schema repräsentirten Systeme der Grössen c entspricht das orthogonale Gleichungensystem:

$$
(O_{2m})\qquad
\begin{array}{ll}
2x^{(1)} = & y^{(1)} + y^{(2)} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + y^{(2m-1)} - y^{(2m)}, \\
2x^{(2)} = & y^{(1)} + y^{(2)} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - y^{(2m-1)} + y^{(2m)}, \\
2x^{(3)} = & y^{(1)} - y^{(2)} + y^{(3)} + y^{(4)}, \\
2x^{(4)} = & -y^{(1)} + y^{(2)} + y^{(3)} + y^{(4)}, \\
2x^{(5)} = & \qquad y^{(3)} - y^{(4)} + y^{(5)} + y^{(6)}, \\
2x^{(6)} = & \qquad -y^{(3)} + y^{(4)} + y^{(5)} + y^{(6)}, \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
2x^{(2m-3)} = & \qquad\qquad y^{(2m-5)} - y^{(2m-4)} + y^{(2m-3)} + y^{(2m-2)}, \\
2x^{(2m-2)} = & \qquad\qquad -y^{(2m-5)} + y^{(2m-4)} + y^{(2m-3)} + y^{(2m-2)}, \\
2x^{(2m-1)} = & \qquad\qquad\qquad y^{(2m-3)} - y^{(2m-2)} + y^{(2m-1)} + y^{(2m)}, \\
2x^{(2m)} = & \qquad\qquad\qquad -y^{(2m-3)} + y^{(2m-2)} + y^{(2m-1)} + y^{(2m)}.
\end{array}
$$

Um die wahre Natur dieses Gleichungensystems und damit zugleich die Möglichkeit seiner Verallgemeinerung für beliebiges r zu erkennen, setze man:

*) Vergl. pag. 9, Z. 2 v. u.

$$x^{(1)} = w^{(1)} + t^{(1)},\; x^{(3)} = w^{(2)} + t^{(2)},\; \ldots,\; x^{(2m-3)} = w^{(m-1)} + t^{(m-1)},\; x^{(2m-1)} = w^{(m)} + t^{(m)},$$
$$x^{(2)} = w^{(1)} - t^{(1)},\; x^{(4)} = w^{(2)} - t^{(2)},\; \ldots,\; x^{(2m-2)} = w^{(m-1)} - t^{(m-1)},\; x^{(2m)} \;\; = w^{(m)} - t^{(m)};$$

es ergeben sich dann für die Grössen y die Werthe:

$$y^{(1)} = w^{(1)} + t^{(2)},\; y^{(3)} = w^{(2)} + t^{(3)},\; \ldots,\; y^{(2m-3)} = w^{(m-1)} + t^{(m)},\; y^{(2m-1)} = w^{(m)} + t^{(1)},$$
$$y^{(2)} = w^{(1)} - t^{(2)},\; y^{(4)} = w^{(2)} - t^{(3)},\; \ldots,\; y^{(2m-2)} = w^{(m-1)} - t^{(m)},\; y^{(2m)} \;\; = w^{(m)} - t^{(1)},$$

und die Relation:

$$x^{(1)^2} + x^{(2)^2} + \cdots + x^{(n)^2} = y^{(1)^2} + y^{(2)^2} + \cdots + y^{(n)^2},$$

welche der Thatsache Ausdruck verleiht, dass das Gleichungensystem (O_{2m}) ein orthogonales ist, geht über in die identische Gleichung:

$$(J_{2m})\quad \left\{\begin{array}{l} (w^{(1)}+t^{(1)})^2+(w^{(2)}+t^{(2)})^2+\cdots+(w^{(m)}+t^{(m)})^2 \\ +(w^{(1)}-t^{(1)})^2+(w^{(2)}-t^{(2)})^2+\cdots+(w^{(m)}-t^{(m)})^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} (w^{(1)}+t^{(2)})^2+(w^{(2)}+t^{(3)})^2+\cdots+(w^{(m)}+t^{(1)})^2 \\ +(w^{(1)}-t^{(2)})^2+(w^{(2)}-t^{(3)})^2+\cdots+(w^{(m)}-t^{(1)})^2 \end{array}\right\}.$$

Von dieser Gleichung (J_{2m}) aus kann man aber auch rückwärts wieder zu dem Gleichungensysteme (O_{2m}) gelangen, wenn man für $\mu = 1, 2, \ldots, m$:

$$\begin{array}{ll} w^{(\mu)} + t^{(\mu)} = x^{(2\mu-1)}, & w^{(\mu)} + t^{(\mu+1)} = y^{(2\mu-1)}, \\ w^{(\mu)} - t^{(\mu)} = x^{(2\mu)}, & w^{(\mu)} - t^{(\mu+1)} = y^{(2\mu)} \end{array}$$

setzt, und dann, nachdem man noch $t^{(m+1)}$ durch $t^{(1)}$ ersetzt hat, durch Elimination der Grössen w und t die Grössen x durch die Grössen y ausdrückt. Man erkennt daraus, dass in der identischen Gleichung (J_{2m}) das Wesen des Gleichungensystems (O_{2m}) vollständig zum Ausdruck gebracht ist.

4.

Die für beliebiges r gewünschte Verallgemeinerung des Gleichungensystems (O_{2m}) macht jetzt, nachdem die sein Wesen charakterisirende identische Gleichung (J_{2m}) gewonnen ist, keine Schwierigkeit. Um zu ihr zu gelangen, hat man zunächst die Gleichung (J_{2m}) zu verallgemeinern.

Zu dem Ende verstehe man unter $w^{(\mu)}$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, m beliebige Grössen, unter $t^{(\mu 1)}, t^{(\mu 2)}, \ldots, t^{(\mu r)}$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, m Gruppen von je r Grössen, die nur den Bedingungen:

$$t^{(\mu 1)} + t^{(\mu 2)} + \cdots + t^{(\mu r)} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

zu genügen haben, und bezeichne ferner mit ϱ eine zweite Einheitswurzel, sodass also ϱ sowohl $+1$ als auch -1 sein kann. Die Gleichung:

$$(J_{rm})\quad \left\{\begin{array}{l} (w^{(1)}+t^{(11)})^2+(w^{(2)}+t^{(21)})^2+\cdots+(w^{(m)}+t^{(m1)})^2 \\ +(w^{(1)}+t^{(12)})^2+(w^{(2)}+t^{(22)})^2+\cdots+(w^{(m)}+t^{(m2)})^2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ +(w^{(1)}+t^{(1r)})^2+(w^{(2)}+t^{(2r)})^2+\cdots+(w^{(m)}+t^{(mr)})^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} (w^{(1)}+t^{(21)})^2+(w^{(2)}+t^{(31)})^2+\cdots+(w^{(m)}+\varrho t^{(11)})^2 \\ +(w^{(1)}+t^{(22)})^2+(w^{(2)}+t^{(32)})^2+\cdots+(w^{(m)}+\varrho t^{(12)})^2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ +(w^{(1)}+t^{(2r)})^2+(w^{(2)}+t^{(3r)})^2+\cdots+(w^{(m)}+\varrho t^{(1r)})^2 \end{array}\right\},$$

die unter den über die Grössen t gemachten Voraussetzungen eine identische ist, bildet dann die naturgemässe Verallgemeinerung der identischen Gleichung (J_{2m}), die als specieller, den Werthen $r=2$, $\varrho=+1$ entsprechender Fall in ihr enthalten ist.

Setzt man nun entsprechend den m Verticalreihen der linken Seite:

$$w^{(1)}+t^{(11)}=x^{(1)},\quad w^{(2)}+t^{(21)}=x^{(r+1)},\ \ldots,\ w^{(m)}+t^{(m1)}=x^{(\overline{m-1}r+1)},$$

$$w^{(1)}+t^{(12)}=x^{(2)},\quad w^{(2)}+t^{(22)}=x^{(r+2)},\ \ldots,\ w^{(m)}+t^{(m2)}=x^{(\overline{m-1}r+2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w^{(1)}+t^{(1r)}=x^{(r)},\quad w^{(2)}+t^{(2r)}=x^{(2r)},\ \ldots,\ w^{(m)}+t^{(mr)}=x^{(mr)},$$

und weiter entsprechend den m Verticalreihen der rechten Seite:

$$w^{(1)}+t^{(21)}=y^{(1)},\quad w^{(2)}+t^{(31)}=y^{(r+1)},\ \ldots,\ w^{(m)}+\varrho t^{(11)}=y^{(\overline{m-1}r+1)},$$

$$w^{(1)}+t^{(22)}=y^{(2)},\quad w^{(2)}+t^{(32)}=y^{(r+2)},\ \ldots,\ w^{(m)}+\varrho t^{(12)}=y^{(\overline{m-1}r+2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w^{(1)}+t^{(2r)}=y^{(r)},\quad w^{(2)}+t^{(3r)}=y^{(2r)},\ \ldots,\ w^{(m)}+\varrho t^{(1r)}=y^{(mr)},$$

drückt alsdann aus der zweiten Gruppe von Gleichungen die Grössen w und t durch die Grössen y aus und führt die auf diese Weise für die Grössen w und t sich ergebenden homogenen linearen Functionen der y in die erste Gruppe von Gleichungen ein, so entsteht ein nur die Grössen x und y enthaltendes orthogonales Gleichungensystem (O_{rm}), welches die für beliebiges r gewünschte Verallgemeinerung des Gleichungensystems (O_{2m}) bildet.

Der Fall $m=1$, der ein Ausnahmefall ist, soll zunächst behandelt werden. In diesem Falle erhält man, wenn $\varrho=+1$ ist, das orthogonale Gleichungensystem:

$$(O_{r1}^{+})\qquad x^{(1)}=y^{(1)},\ x^{(2)}=y^{(2)},\ \ldots,\ x^{(r)}=y^{(r)},$$

das aber für das Folgende keine Beachtung verdient; wenn dagegen $\varrho=-1$ ist, das orthogonale Gleichungensystem:

$$(O_{r1}^{-})\qquad \begin{array}{l} rx^{(1)}=(2-r)y^{(1)}+2y^{(2)}+\cdots+2y^{(r)},\\ rx^{(2)}=2y^{(1)}+(2-r)y^{(2)}+\cdots+2y^{(r)},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ rx^{(r)}=2y^{(1)}+2y^{(2)}+\cdots+(2-r)y^{(r)}. \end{array}$$

Nachdem so der Fall $m=1$ erledigt ist, sei für das Folgende $m>1$ vorausgesetzt. In diesem Falle ergibt sich aus (J_{rm}) das orthogonale Gleichungensystem:

$$
\begin{aligned}
rx^{(1)} &= y^{(1)} + y^{(2)} + \cdots + y^{(r)} + \varrho(r-1)y^{(\overline{m-1}\,r+1)} - \varrho\, y^{(\overline{m-1}\,r+2)} - \cdots - \varrho\, y^{(mr)},\\
rx^{(2)} &= y^{(1)} + y^{(2)} + \cdots + y^{(r)} - \varrho\, y^{(\overline{m-1}\,r+1)} + \varrho(r-1)y^{(\overline{m-1}\,r+2)} - \cdots - \varrho\, y^{(mr)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
rx^{(r)} &= y^{(1)} + y^{(2)} + \cdots + y^{(r)} - \varrho\, y^{(\overline{m-1}\,r+1)} - \varrho\, y^{(\overline{m-1}\,r+2)} - \cdots + \varrho(r-1)y^{(mr)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
rx^{(r+1)} &= (r-1)\,y^{(1)} - y^{(2)} - \cdots - y^{(r)} + y^{(r+1)} + y^{(r+2)} + \cdots + y^{(2r)},\\
rx^{(r+2)} &= -\,y^{(1)} + (r-1)\,y^{(2)} - \cdots - y^{(r)} + y^{(r+1)} + y^{(r+2)} + \cdots + y^{(2r)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
rx^{(2r)} &= -\,y^{(1)} - y^{(2)} - \cdots + (r-1)y^{(r)} + y^{(r+1)} + y^{(r+2)} + \cdots + y^{(2r)},
\end{aligned}
$$

$$
(O_{rm})\quad
\begin{aligned}
rx^{(2r+1)} &= (r-1)\,y^{(r+1)} - y^{(r+2)} - \cdots - y^{(2r)} + y^{(2r+1)} + y^{(2r+2)} + \cdots + y^{(3r)},\\
rx^{(2r+2)} &= -\,y^{(r+1)} + (r-1)y^{(r+2)} - \cdots - y^{(2r)} + y^{(2r+1)} + y^{(2r+2)} + \cdots + y^{(3r)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
rx^{(3r)} &= -\,y^{(r+1)} - y^{(r+2)} - \cdots + (r-1)y^{(2r)} + y^{(2r+1)} + y^{(2r+2)} + \cdots + y^{(3r)},
\end{aligned}
$$

. . . .

. . . .

$$
\begin{aligned}
rx^{(\overline{m-1}\,r+1)} &= (r-1)y^{(\overline{m-2}\,r+1)} - y^{(\overline{m-2}\,r+2)} - \cdots - y^{(\overline{m-1}\,r)} + y^{(\overline{m-1}\,r+1)} + y^{(\overline{m-1}\,r+2)} + \cdots + y^{(mr)},\\
rx^{(\overline{m-1}\,r+2)} &= -\,y^{(\overline{m-2}\,r+1)} + (r-1)y^{(\overline{m-2}\,r+2)} - \cdots - y^{(\overline{m-1}\,r)} + y^{(\overline{m-1}\,r+1)} + y^{(\overline{m-1}\,r+2)} + \cdots + y^{(mr)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
rx^{(mr)} &= -\,y^{(\overline{m-2}\,r+1)} - y^{(\overline{m-2}\,r+2)} - \cdots + (r-1)y^{(\overline{m-1}\,r)} + y^{(\overline{m-1}\,r+1)} + y^{(\overline{m-1}\,r+2)} + \cdots + y^{(mr)}.
\end{aligned}
$$

Um den Bau des Systems (O_{rm}) besser übersehen zu können und zugleich die Analogie, welche zwischen seiner Bildung und der Bildung des im vorigen Artikel aufgestellten, dem Werthe $r = 2$ entsprechenden Systemes (O_{2m}) besteht, mehr hervortreten zu lassen, sollen schliesslich noch die auf den rechten Seiten von (O_{rm}) stehenden Coefficienten in ein quadratisches Schema eingeordnet werden. Zu dem Ende bezeichne man die drei folgenden, je r^2 Zahlen enthaltenden Complexe:

$$
\begin{matrix}
+1 & +1 \cdots +1 \\
+1 & +1 \cdots +1 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
+1 & +1 \cdots +1
\end{matrix}
\qquad
\begin{matrix}
r-1 & -1 \cdots & -1 \\
-1 & r-1 \cdots & -1 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
-1 & -1 \cdots & r-1
\end{matrix}
\qquad
\begin{matrix}
\varrho(r-1) & -\varrho & \cdots & -\varrho \\
-\varrho & \varrho(r-1) & \cdots & -\varrho \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
-\varrho & -\varrho & \cdots & \varrho(r-1)
\end{matrix}
$$

symbolisch mit:

$$
\mathrm{A} \qquad\qquad \mathrm{B} \qquad\qquad \varrho\mathrm{B},
$$

dann wird das System der auf den rechten Seiten der Gleichungen (O_{rm}) stehenden m^2r^2 Coefficienten durch das Schema:

A							ϱB
B	A						
	B	A					
				B	A		
					B	A	
						B	A

repräsentirt, wenn man sich die in den fixirten Horizontalreihen noch offenen Plätze sämmtlich mit der Null besetzt denkt.

5.

Durch die Untersuchungen des vorigen Artikels sind unbegrenzt viele orthogonale Substitutionen gewonnen worden; eine derselben wird durch das Gleichungensystem (O_{r1}^{-}) geliefert, die übrigen erhält man, wenn man in (O_{rm}) der Zahl m der Reihe nach die Werthe 2, 3, 4, ... zulegt und dann zu jedem solchen Werthe von m das eine Mal $\varrho = +1$, das andere Mal $\varrho = -1$ setzt; die Substitutionen der ersten Art mögen von jetzt an mit (O_{rm}^{+}), $m = 2, 3, 4, \ldots$, die der zweiten Art mit (O_{rm}^{-}), $m = 2, 3, 4, \ldots$ bezeichnet werden. Alle diese Substitutionen lassen sich nun, wie zum Schlusse gezeigt werden soll, aus passend gewählten Substitutionen von der Form (O_{r1}^{-}), (O_{r2}^{+}) unter Hinzunahme identischer Substitutionen zusammensetzen.

Erweitert man nämlich die Substitution (O_{r1}^{-}), nachdem man vorher darin die Grössen:

$$x^{(1)},\ x^{(2)},\ \ldots,\ x^{(r)};\qquad y^{(1)},\ y^{(2)},\ \ldots,\ y^{(r)}$$

in neuer Bezeichnung durch die Grössen:

$$y^{(\overline{m-1}\,r+1)},\ y^{(\overline{m-1}\,r+2)},\ \ldots,\ y^{(mr)};\qquad z^{(\overline{m-1}\,r+1)},\ z^{(\overline{m-1}\,r+2)},\ \ldots,\ z^{(mr)}$$

ersetzt hat, durch Hinzunahme der $(m-1)r$ identischen Gleichungen:

$$ry^{(1)} = rz^{(1)},\quad ry^{(2)} = rz^{(2)},\ \ldots,\ ry^{(\overline{m-1}\,r)} = rz^{(\overline{m-1}\,r)}$$

zu einer der Zahl mr entsprechenden orthogonalen Substitution (O'_{rm}) und setzt die beiden Substitutionen (O_{rm}^{+}), (O'_{rm}) zusammen, indem man die auf den rechten Seiten von (O_{rm}^{+}) vorkommenden Grössen y durch die aus (O'_{rm}) dafür sich ergebenden linearen

Formen der z ersetzt, so entsteht eine neue orthogonale Substitution, welche, da es auf die Bezeichnung der Variablen nicht ankommt, mit (O_{rm}^{-}) identisch ist. Damit ist zunächst bewiesen, dass man für jedes m von der Substitution (O_{rm}^{+}) zu der Substitution (O_{rm}^{-}) gelangen kann, indem man die erstere unter Hinzunahme identischer Substitutionen mit einer Substitution (O_{r1}^{-}) zusammensetzt.

Erweitert man ferner die Substitution (O_{rm}^{+}) durch Hinzunahme der r identischen Gleichungen:

$$r x^{(mr+1)} = r y^{(mr+1)}, \quad r x^{(mr+2)} = r y^{(mr+2)}, \; \ldots, \; r x^{(\overline{m+1}\, r)} = r y^{(\overline{m+1}\, r)}$$

zu einer der Zahl $(m+1)r$ entsprechenden orthogonalen Substitution $(O'_{r\,\overline{m+1}})$ und gleichzeitig die Substitution (O_{r2}^{+}), nachdem man darin zuvor die Grössen:

$$x^{(1)}, \; x^{(2)}, \; \ldots, \; x^{(2r)}; \qquad y^{(1)}, \; y^{(2)}, \; \ldots, \; y^{(2r)}$$

in neuer Bezeichnung durch die Grössen:

$$y^{(\overline{m-1}\, r+1)}, \; y^{(\overline{m-1}\, r+2)}, \; \ldots, \; y^{(\overline{m+1}\, r)}; \qquad z^{(\overline{m-1}\, r+1)}, \; z^{(\overline{m-1}\, r+2)}, \; \ldots, \; z^{(\overline{m+1}\, r)}$$

ersetzt hat, durch Hinzunahme der $(m-1)r$ identischen Gleichungen:

$$r y^{(1)} = r z^{(1)}, \quad r y^{(2)} = r z^{(2)}, \; \ldots, \; r y^{(\overline{m-1}\, r)} = r z^{(\overline{m-1}\, r)}$$

gleichfalls zu einer der Zahl $(m+1)r$ entsprechenden orthogonalen Substitution $(O''_{r\,\overline{m+1}})$ und setzt dann die beiden Substitutionen $(O'_{r\,\overline{m+1}})$, $(O''_{r\,\overline{m+1}})$ zusammen, so entsteht eine neue orthogonale Substitution, welche mit der Substitution $(O_{r\,\overline{m+1}}^{+})$ identisch ist. Damit ist bewiesen, dass man von der einem beliebigen Werthe von m entsprechenden Substitution (O_{rm}^{+}) zu der dem Werthe $m+1$ entsprechenden Substitution $(O_{r\,\overline{m+1}}^{+})$ aufsteigen kann, indem man die erstere in passender Weise mit einer Substitution (O_{r2}^{+}) zusammensetzt.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich nun ohne Mühe das Endresultat, dass jede Substitution (O_{rm}^{+}), $m = 3, 4, \ldots$ durch Zusammensetzung von $m-1$ passend gewählten Substitutionen (O_{r2}^{+}), jede Substitution (O_{rm}^{-}), $m = 2, 3, 4, \ldots$ durch Zusammensetzung von $m-1$ passend gewählten Substitutionen (O_{r2}^{+}) und einer einzigen Substitution (O_{r1}^{-}), jedesmal unter Hinzunahme identischer Substitutionen erhalten werden kann; ein Resultat, das auch durch die Betrachtung der den genannten Substitutionen entsprechenden identischen Gleichungen (J_{rm}) hätte erhalten werden können.

———

Siebenter Abschnitt.

Aufstellung der Thetaformeln, welche den im vorigen Abschnitte gewonnenen orthogonalen Substitutionen entsprechen.

1.

Anknüpfend an die Untersuchungen des vorigen Abschnitts kann man das folgende Resultat aussprechen.

Sind $c^{(\varrho\sigma)}$, $\varrho, \sigma = 1, 2, \ldots, n$, die n^2 Coefficienten eines orthogonalen Gleichungensystems, so geht die Form:

$$A = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \left(x_\mu^{(1)} x_{\mu'}^{(1)} + x_\mu^{(2)} x_{\mu'}^{(2)} + \cdots + x_\mu^{(n)} x_{\mu'}^{(n)}\right)$$

durch die Substitution:

$$(S) \qquad \left.\begin{aligned} r x_\mu^{(1)} &= c^{(11)} y_\mu^{(1)} + c^{(12)} y_\mu^{(2)} + \cdots + c^{(1n)} y_\mu^{(n)}, \\ r x_\mu^{(2)} &= c^{(21)} y_\mu^{(1)} + c^{(22)} y_\mu^{(2)} + \cdots + c^{(2n)} y_\mu^{(n)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r x_\mu^{(n)} &= c^{(n1)} y_\mu^{(1)} + c^{(n2)} y_\mu^{(2)} + \cdots + c^{(nn)} y_\mu^{(n)}, \end{aligned}\right\} (S_\mu)$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, p,$$

über in die Form:

$$B = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \left(y_\mu^{(1)} y_{\mu'}^{(1)} + y_\mu^{(2)} y_{\mu'}^{(2)} + \cdots + y_\mu^{(n)} y_{\mu'}^{(n)}\right).$$

Unter der Voraussetzung, dass die Grössen $a_{\mu\mu'}$ den für Parameter von Thetafunctionen bestehenden Bedingungen genügen, soll jetzt diejenige Thetaformel, welche der Überführung der Form A in die Form B durch die Substitution (S) entspricht, aus der in Art. 1 des dritten Abschnitts aufgestellten Fundamentalformel (Θ) abgeleitet werden.

Zu dem Ende hat man die in der Formel (Θ) vorkommenden Grössen $a_{\mu\mu'}^{(1)}, \ldots,$ $a_{\mu\mu'}^{(n)}$, $b_{\mu\mu'}^{(1)}, \ldots, b_{\mu\mu'}^{(n)}$ $(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$ in die Coefficienten der soeben aufgestellten Formen A, B und zugleich die der Formel (Θ) zu Grunde liegende allgemeine Sub-

hervor, vermittelst welcher jedes Thetaproduct von der Form:

$$\vartheta(\!(v+a^{(1)})\!)\,\vartheta(\!(v+a^{(2)})\!)\ldots\vartheta(\!(v+a^{(m)})\!),$$

bei dem die Constanten a den p Bedingungen:

$$a_\mu^{(1)}+a_\mu^{(2)}+\cdots+a_\mu^{(m)}=0 \qquad {\scriptstyle(\mu=1,2,\ldots,p)}$$

genügen, durch die r^{2p} zur Zahl r gehörigen Normalfunctionen $\vartheta\left[\frac{\varepsilon}{r}\right](\!(v)\!)$ ausgedrückt werden kann.

In der gewonnenen Formel (F) sollen weiter für die Constanten c, a m^{te} Theile der Periodicitätsmodulen eingeführt werden. Zu dem Ende verstehe man unter $\varkappa_\mu$, $\varkappa'_\mu$, $\alpha_\mu^{(\nu)}$, $\alpha_\mu^{'(\nu)}$ $\left({\nu=0,1,2,\ldots,m \atop \mu=1,2,\ldots,p}\right)$ ganze Zahlen, welche den $2p$ Bedingungen:

$$\alpha_\mu^{(1)}+\alpha_\mu^{(2)}+\cdots+\alpha_\mu^{(m)}=0,\qquad \alpha_\mu^{'(1)}+\alpha_\mu^{'(2)}+\cdots+\alpha_\mu^{'(m)}=0 \qquad {\scriptstyle(\mu=1,2,\ldots,p)}$$

genügen, und setze für ${\nu=0,1,2,\ldots,m \atop \mu=1,2,\ldots,p}$:

$$c_\mu=\frac{\varkappa'_\mu}{m}\pi i+\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p}\frac{\varkappa_{\mu'}}{m}a_{\mu\mu'},\qquad a_\mu^{(\nu)}=\frac{\alpha_\mu^{'(\nu)}}{m}\pi i+\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p}\frac{\alpha_{\mu'}^{(\nu)}}{m}a_{\mu\mu'}.$$

Unter Anwendung der Hülfsformel (A) pag. 7 geht dann, wenn man noch zur Abkürzung für ${\nu=0,1,2,\ldots,m \atop \mu=1,2,\ldots,p}$:

$$\alpha_\mu^{(0)}+\alpha_\mu^{(1)}+\cdots+\alpha_\mu^{(\nu)}=\sigma_\mu^{(\nu)},\qquad \alpha_\mu^{'(0)}+\alpha_\mu^{'(1)}+\cdots+\alpha_\mu^{'(\nu)}=\sigma_\mu^{'(\nu)}$$

setzt, aus der Formel (F) die Formel:

$$(\mathrm{F}')\quad r^{(m+1)p}\left\{\begin{matrix}\vartheta^{r-2}\left[\frac{\varkappa+\alpha^{(1)}}{m}\right](\!(0)\!) & \vartheta^{r-2}\left[\frac{\varkappa+\alpha^{(2)}}{m}\right](\!(0)\!) & \ldots\vartheta^{r-2}\left[\frac{\varkappa+\alpha^{(m)}}{m}\right](\!(0)\!)\\ \vartheta\left[\frac{r\sigma^{(0)}+\alpha^{(1)}}{m}\right](\!(0)\!) & \vartheta\left[\frac{r\sigma^{(1)}+\alpha^{(2)}}{m}\right](\!(0)\!)\ldots & \vartheta\left[\frac{r\sigma^{(m-1)}+\alpha^{(m)}}{m}\right](\!(0)\!)\\ \vartheta\left[\frac{\alpha^{(1)}}{m}\right](\!(v)\!) & \vartheta\left[\frac{\alpha^{(2)}}{m}\right](\!(v)\!) & \ldots\vartheta\left[\frac{\alpha^{(m)}}{m}\right](\!(v)\!)\end{matrix}\right\}$$

$$=\sum_{\left[\frac{\varepsilon}{r}\right]}\left\{\begin{matrix}\vartheta^{r-2}\left[\frac{\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)}}{r}+\frac{\varkappa}{m}\right](\!(0)\!) & \vartheta^{r-2}\left[\frac{\varepsilon^{(2)}-\varepsilon^{(3)}}{r}+\frac{\varkappa}{m}\right](\!(0)\!) & \ldots\vartheta^{r-2}\left[\frac{\varepsilon^{(m)}-\varepsilon^{(1)}}{r}+\frac{\varkappa}{m}\right](\!(0)\!)\\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)}}{r}+\frac{r\sigma^{(1)}}{m}\right](\!(0)\!) & \vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(2)}-\varepsilon^{(3)}}{r}+\frac{r\sigma^{(2)}}{m}\right](\!(0)\!)\ldots & \vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(m)}-\varepsilon^{(1)}}{r}+\frac{r\sigma^{(m)}}{m}\right](\!(0)\!)\\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(1)}-\varepsilon^{(2)}}{r}\right](\!(v)\!) & \vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(2)}-\varepsilon^{(3)}}{r}\right](\!(v)\!) & \ldots\vartheta\left[\frac{\varepsilon^{(m)}-\varepsilon^{(1)}}{r}\right](\!(v)\!)\\ & \times e^{\frac{2\pi i}{r}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\left[(\varepsilon_\mu^{(1)}-\varepsilon_\mu^{(2)})\varepsilon_\mu^{'(2)}+(\varepsilon_\mu^{(2)}-\varepsilon_\mu^{(3)})\varepsilon_\mu^{'(3)}+\cdots+(\varepsilon_\mu^{(m)}-\varepsilon_\mu^{(1)})\varepsilon_\mu^{'(1)}\right]} & \end{matrix}\right\}$$

$$\times e^{-\frac{2\pi i}{m}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\left[\sigma_\mu^{(1)}(\varepsilon_\mu^{'(1)}-\varepsilon_\mu^{'(2)})+\sigma_\mu^{(2)}(\varepsilon_\mu^{'(2)}-\varepsilon_\mu^{'(3)})+\cdots+\sigma_\mu^{(m)}(\varepsilon_\mu^{'(m)}-\varepsilon_\mu^{'(1)})\right]}$$

hervor, vermittelst welcher das Product:

$$\vartheta\left[\frac{\alpha^{(1)}}{m}\right](\!(v)\!)\;\vartheta\left[\frac{\alpha^{(2)}}{m}\right](\!(v)\!)\ldots\vartheta\left[\frac{\alpha^{(m)}}{m}\right](\!(v)\!)$$

von zur Zahl m gehörigen Thetafunctionen durch die zu einer beliebig gewählten Zahl r gehörigen Thetafunctionen ausgedrückt werden kann.

Setzt man für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\alpha_\mu^{(1)} = \alpha_\mu^{(2)} = \cdots = \alpha_\mu^{(m-1)} = \alpha_\mu, \qquad \alpha_\mu^{\prime(1)} = \alpha_\mu^{\prime(2)} = \cdots = \alpha_\mu^{\prime(m-1)} = \alpha_\mu^{\prime},$$
$$\alpha_\mu^{(m)} = (1-m)\,\alpha_\mu, \qquad \alpha_\mu^{\prime(m)} = (1-m)\,\alpha_\mu^{\prime},$$

so geht das genannte Thetaproduct, von einer Exponentialgrösse abgesehen, in $\vartheta^m\left[\frac{\alpha}{m}\right](\!(v)\!)$ über.

2.

Es soll endlich gezeigt werden, dass die zu irgend einer Zahl r gehörigen Thetaquotienten Additionstheoreme von der Beschaffenheit besitzen, dass die dem Argumentensysteme $(w+t)$ entsprechenden Werthe dieser Quotienten sich rational durch die den Argumentensystemen (w) und (t) entsprechenden Werthe ausdrücken lassen, und dass dabei als Constanten, von r^{ten} Einheitswurzeln abgesehen, nur die den Argumentensystemen (0) entsprechenden Werthe dieser Quotienten auftreten.

Um diese Additionstheoreme zu erhalten, setze man in der Formel (Θ_{r2}^{+}) pag. 53 für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$w_\mu^{(1)} = u_\mu, \quad t_\mu^{(11)} = v_\mu, \quad t_\mu^{(12)} = -v_\mu, \quad t_\mu^{(13)} = t_\mu^{(14)} = \cdots = t_\mu^{(1r)} = 0,$$
$$w_\mu^{(2)} = 0, \quad t_\mu^{(21)} = t_\mu^{(22)} = \cdots = t_\mu^{(2r)} = 0,$$
$$\eta_\mu = 0, \quad \eta_\mu^{\prime} = 0,$$

ferner ein Mal:

$$\varkappa_\mu^{(11)} = \frac{\alpha_\mu^{(11)}}{r}, \ldots, \varkappa_\mu^{(1r)} = \frac{\alpha_\mu^{(1r)}}{r}, \quad \varkappa_\mu^{(21)} = \frac{\alpha_\mu^{(21)}}{r}, \ldots, \varkappa_\mu^{(2r)} = \frac{\alpha_\mu^{(2r)}}{r},$$
$$\varkappa_\mu^{\prime(11)} = \frac{\alpha_\mu^{\prime(11)}}{r}, \ldots, \varkappa_\mu^{\prime(1r)} = \frac{\alpha_\mu^{\prime(1r)}}{r}, \quad \varkappa_\mu^{\prime(21)} = \frac{\alpha_\mu^{\prime(21)}}{r}, \ldots, \varkappa_\mu^{\prime(2r)} = \frac{\alpha_\mu^{\prime(2r)}}{r},$$

indem man unter den α, α' ganze Zahlen versteht, welche den $2p$ Bedingungen:

$$\begin{aligned}\alpha_\mu^{(11)} + \cdots + \alpha_\mu^{(1r)} + \alpha_\mu^{(21)} + \cdots + \alpha_\mu^{(2r)} = 0,\\ \alpha_\mu^{\prime(11)} + \cdots + \alpha_\mu^{\prime(1r)} + \alpha_\mu^{\prime(21)} + \cdots + \alpha_\mu^{\prime(2r)} = 0\end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

genügen, ein ander Mal:

$$\varkappa_\mu^{(11)} = \frac{\beta_\mu^{(11)}}{r}, \ldots, \varkappa_\mu^{(1r)} = \frac{\beta_\mu^{(1r)}}{r}, \quad \varkappa_\mu^{(21)} = \frac{\beta_\mu^{(21)}}{r}, \ldots, \varkappa_\mu^{(2r)} = \frac{\beta_\mu^{(2r)}}{r},$$
$$\varkappa_\mu^{\prime(11)} = \frac{\beta_\mu^{\prime(11)}}{r}, \ldots, \varkappa_\mu^{\prime(1r)} = \frac{\beta_\mu^{\prime(1r)}}{r}, \quad \varkappa_\mu^{\prime(21)} = \frac{\beta_\mu^{\prime(21)}}{r}, \ldots, \varkappa_\mu^{(2r)} = \frac{\beta_\mu^{\prime(2r)}}{r},$$

indem man unter den β, β' gleichfalls ganze Zahlen versteht, welche den $2p$ Bedingungen:

$$\begin{aligned}\beta_\mu^{(11)} + \cdots + \beta_\mu^{(1r)} + \beta_\mu^{(21)} + \cdots + \beta_\mu^{(2r)} &= 0, \\ \beta_\mu'^{(11)} + \cdots + \beta_\mu'^{(1r)} + \beta_\mu'^{(21)} + \cdots + \beta_\mu'^{(2r)} &= 0\end{aligned} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

genügen, und setze noch voraus, dass für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\alpha_\mu^{(12)} = \beta_\mu^{(12)}$$

sei. Dividirt man dann die beiden auf die angegebene Weise aus (Θ'^{+}_{r2}) hervorgehenden Formeln durcheinander, so erhält man das gewünschte Additionstheorem der zur Zahl r gehörigen Thetaquotienten in der allgemeinsten Gestalt:

$$\frac{\vartheta\left[\frac{\alpha^{(21)}}{r}\right]((0)) \cdots \vartheta\left[\frac{\alpha^{(2r)}}{r}\right]((0))}{\vartheta\left[\frac{\beta^{(21)}}{r}\right]((0)) \cdots \vartheta\left[\frac{\beta^{(2r)}}{r}\right]((0))} : \frac{\vartheta\left[\frac{\alpha^{(13)}}{r}\right]((u)) \cdots \vartheta\left[\frac{\alpha^{(1r)}}{r}\right]((u))}{\vartheta\left[\frac{\beta^{(13)}}{r}\right]((u)) \cdots \vartheta\left[\frac{\beta^{(1r)}}{r}\right]((u))} \cdot \frac{\vartheta\left[\frac{\alpha^{(11)}}{r}\right]((u+v))}{\vartheta\left[\frac{\beta^{(11)}}{r}\right]((u+v))}$$

$$= \frac{\sum\limits_{\left[\frac{\varepsilon}{r}\right]} \left\{\begin{matrix} \vartheta\left[\frac{\varepsilon - \alpha^{(21)}}{r}\right]((u))\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon - \alpha^{(11)}}{r}\right]((-v)) \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon - \alpha^{(22)}}{r}\right]((u))\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon - \alpha^{(12)}}{r}\right]((v)) \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon - \alpha^{(23)}}{r}\right]((u))\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon - \alpha^{(13)}}{r}\right]((0)) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon - \alpha^{(2r)}}{r}\right]((u))\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon - \alpha^{(1r)}}{r}\right]((0)) \end{matrix}\right\} e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu}}{\sum\limits_{\left[\frac{\varepsilon}{r}\right]} \left\{\begin{matrix} \vartheta\left[\frac{\varepsilon - \beta^{(21)}}{r}\right]((u))\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon - \beta^{(11)}}{r}\right]((-v)) \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon - \beta^{(22)}}{r}\right]((u))\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon - \beta^{(12)}}{r}\right]((v)) \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon - \beta^{(23)}}{r}\right]((u))\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon - \beta^{(13)}}{r}\right]((0)) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon - \beta^{(2r)}}{r}\right]((u))\ \vartheta\left[\frac{\varepsilon - \beta^{(1r)}}{r}\right]((0)) \end{matrix}\right\} e^{-\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu}}.$$

Durch passende Wahl der Zahlen α, β kann die erhaltene Gleichung auf verschiedene Weisen in eine einfachere Form gebracht werden.

Zweiter Theil.

Theorie der Transformation

der

Thetafunctionen.

Erster Abschnitt.

Einleitung in die Transformationstheorie.

1.

Gegeben sei eine Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](\!(u)\!)_a$ definirt durch eine p-fach unendliche Reihe vermittelst der Gleichung:

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](\!(u)\!)_a = \sum_{m_1,\ldots,m_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}(m_\mu+g_\mu)(m_{\mu'}+g_{\mu'})+2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(m_\mu+g_\mu)(u_\mu+h_\mu\pi i)};$$

die Parameter $a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$ sollen dabei nur der für die absolute Convergenz der Reihe nothwendigen und hinreichenden Bedingung, dass für reelle x der reelle Theil von $\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} a_{\mu\mu'}x_\mu x_{\mu'}$ eine negative Form ist, unterworfen sein; die Buchstaben $u_1, \ldots, u_p$ sollen ferner unabhängige complexe Veränderliche, die Buchstaben $g_1, \ldots, g_p$, $h_1, \ldots, h_p$ beliebige reelle Constanten bezeichnen. Die so definirte Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](\!(u)\!)_a$ genügt dann den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](u_1 \mid \cdots \mid u_\nu + \pi i \mid \cdots \mid u_p)_a &= \vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](u_1 \mid \cdots \mid u_\nu \mid \cdots \mid u_p)_a e^{2g_\nu\pi i}, \\
\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](u_1 + a_{1\nu} \mid \cdots \mid u_p + a_{p\nu})_a &= \vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](u_1 \mid \cdots \mid u_p)_a e^{-2u_\nu - a_{\nu\nu} - 2h_\nu\pi i},
\end{aligned} \qquad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

und es sollen die in diesen Formeln auftretenden $2p$ Systeme gleichzeitiger Änderungen der Variablen $u_1 \mid u_2 \mid \ldots \mid u_p$:

$$\begin{array}{lll}
\pi i \mid 0 \mid \ldots \mid 0, & \qquad & a_{11} \mid a_{21} \mid \ldots \mid a_{p1}, \\
0 \mid \pi i \mid \ldots \mid 0, & & a_{12} \mid a_{22} \mid \ldots \mid a_{p2}, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
0 \mid 0 \mid \ldots \mid \pi i, & & a_{1p} \mid a_{2p} \mid \ldots \mid a_{pp}
\end{array}$$

die Periodensysteme der Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](\!(u)\!)_a$ genannt werden. Versteht man weiter unter $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ beliebige reelle Grössen, so soll jedes System von p Grössen von der Form:

$$\varkappa_1 \pi i + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \lambda_\varrho a_{1\varrho} \mid \varkappa_2 \pi i + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \lambda_\varrho a_{2\varrho} \mid \ldots \; \varkappa_p \pi i + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \lambda_\varrho a_{p\varrho}$$

ein System gleichzeitiger Änderungen der Variablen u genannt werden. Man bilde nun mit Hülfe von $4p^2$ rationalen Zahlen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{d}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ die $2p$ Systeme correspondirender Änderungen der Variablen u:

$$\begin{array}{ll} A_{11} \mid A_{21} \mid \ldots \mid A_{p1}, & B_{11} \mid B_{21} \mid \ldots \mid B_{p1}, \\ A_{12} \mid A_{22} \mid \ldots \mid A_{p2}, & B_{12} \mid B_{22} \mid \ldots \mid B_{p2}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_{1p} \mid A_{2p} \mid \ldots \mid A_{pp}, & B_{1p} \mid B_{2p} \mid \ldots \mid B_{pp}, \end{array}$$

wobei für $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p$:

$$A_{\mu\nu} = \mathfrak{a}_{\nu\mu} \pi i + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{b}_{\nu\varrho} a_{\mu\varrho}, \qquad B_{\mu\nu} = \mathfrak{c}_{\nu\mu} \pi i + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{d}_{\nu\varrho} a_{\mu\varrho}$$

ist, und stelle sich die Frage, ob es immer oder nur unter gewissen Voraussetzungen über die rationalen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ möglich ist, die Variablen $u_1 \mid u_2 \mid \ldots \mid u_p$ mit p neuen Variablen $v_1 \mid v_2 \mid \ldots \mid v_p$ durch eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante derart zu verknüpfen, dass den $2p$ Systemen A, B von Änderungen der Variablen u $2p$ Systeme von Änderungen der Variablen v entsprechen, welche als die $2p$ Periodensysteme einer Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((v))_b$ angesehen, also durch passende Wahl ihrer Reihenfolge in die Form:

$$\begin{array}{ll} \pi i \mid 0 \mid \ldots \mid 0, & b_{11} \mid b_{21} \mid \ldots \mid b_{p1}, \\ 0 \mid \pi i \mid \ldots \mid 0, & b_{12} \mid b_{22} \mid \ldots \mid b_{p2}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 \mid 0 \mid \ldots \mid \pi i, & b_{1p} \mid b_{2p} \mid \ldots \mid b_{pp} \end{array}$$

gebracht werden können, wobei allgemein $b_{\varepsilon\varepsilon'} = b_{\varepsilon'\varepsilon}$ ist, und für reelle x der reelle Theil von $\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'} b_{\mu\mu'} x_\mu x_{\mu'}$ eine negative Form ist.

Die zwischen den u und v aufzustellenden linearen Gleichungen sind schon vollständig bestimmt, sobald man nur den ersten p Systemen des ersten, die Grössen A, B enthaltenden Schemas die ersten p des zweiten, die Grössen πi, b enthaltenden Schemas als entsprechende zugeordnet hat, und zwar können dieselben nur die Form:

$$\begin{aligned} \pi i\, u_1 &= A_{11} v_1 + A_{12} v_2 + \cdots + A_{1p} v_p, \\ \pi i\, u_2 &= A_{21} v_1 + A_{22} v_2 + \cdots + A_{2p} v_p, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \pi i\, u_p &= A_{p1} v_1 + A_{p2} v_2 + \cdots + A_{pp} v_p \end{aligned}$$

besitzen. Die aus den p^2 Grössen A gebildete Determinante $\Delta_A = \Sigma \pm A_{11} A_{22} \ldots A_{pp}$ muss dabei entsprechend der vorher gestellten Bedingung einen von Null verschiedenen Werth haben. Diese Bedingung soll zunächst als erfüllt vorausgesetzt werden; es lassen sich dann auch umgekehrt die v linear durch die u ausdrücken in der Form:

$$\frac{\Delta_A}{\pi i} v_1 = \bar{A}_{11} u_1 + \bar{A}_{21} u_2 + \cdots + \bar{A}_{p1} u_p,$$

$$\frac{\Delta_A}{\pi i} v_2 = \bar{A}_{12} u_1 + \bar{A}_{22} u_2 + \cdots + \bar{A}_{p2} u_p,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\frac{\Delta_A}{\pi i} v_p = \bar{A}_{1p} u_1 + \bar{A}_{2p} u_2 + \cdots + \bar{A}_{pp} u_p,$$

wobei $\bar{A}_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $A_{\mu\nu}$ in der Determinante Δ_A bezeichnet. Mit Hülfe dieser Gleichungen ergeben sich jetzt für die den Änderungen B der Variablen u entsprechenden Änderungen b der Variablen v die Ausdrücke:

$$b_{1\nu} = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \bar{A}_{\varrho 1} B_{\varrho\nu}, \quad b_{2\nu} = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \bar{A}_{\varrho 2} B_{\varrho\nu}, \ldots, \quad b_{p\nu} = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \bar{A}_{\varrho p} B_{\varrho\nu}, \quad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

und es ist zu untersuchen, ob diese Grössen b den vorher für sie aufgestellten Bedingungen genügen.

Diese Bedingungen verlangen zunächst, dass für jedes ε und ε' von 1 bis p $b_{\varepsilon\varepsilon'} = b_{\varepsilon'\varepsilon}$ sei. Man beweist leicht, dass die $\frac{1}{2}p(p-1)$ Gleichungen $b_{\varepsilon\varepsilon'} = b_{\varepsilon'\varepsilon}$ durch die $\frac{1}{2}p(p-1)$ Gleichungen:

$$\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (A_{\mu\varepsilon} B_{\mu'\varepsilon} - A_{\mu'\varepsilon} B_{\mu\varepsilon}) = 0 \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

ersetzt werden können, und weiter, dass die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen dieser letzteren die ist, dass zwischen den rationalen Zahlen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{d}_{\mu\nu}$ die $p(2p-1)$ Relationen:

$$(\mathfrak{T}_1) \qquad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\mathfrak{a}_{\varepsilon\mu} \mathfrak{c}_{\varepsilon\mu'} - \mathfrak{a}_{\varepsilon\mu'} \mathfrak{c}_{\varepsilon\mu}) = 0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\mathfrak{b}_{\varepsilon\mu} \mathfrak{d}_{\varepsilon\mu'} - \mathfrak{b}_{\varepsilon\mu'} \mathfrak{d}_{\varepsilon\mu}) = 0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\mathfrak{a}_{\varepsilon\mu} \mathfrak{d}_{\varepsilon\mu'} - \mathfrak{c}_{\varepsilon\mu} \mathfrak{b}_{\varepsilon\mu'}) = \begin{matrix} t, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{matrix} \end{gathered} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

bestehen, in denen t eine zunächst nicht näher bestimmbare rationale Zahl bezeichnet.

2.

Genügen $4p^2$ Grössen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{d}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ den Relationen $(\mathfrak{T}_1)$, so besitzt das Quadrat der aus ihnen gebildeten Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \ldots & \mathfrak{a}_{1p} & \mathfrak{b}_{11} & \ldots & \mathfrak{b}_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{a}_{p1} & \ldots & \mathfrak{a}_{pp} & \mathfrak{b}_{p1} & \ldots & \mathfrak{b}_{pp} \\ \mathfrak{c}_{11} & \ldots & \mathfrak{c}_{1p} & \mathfrak{d}_{11} & \ldots & \mathfrak{d}_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{c}_{p1} & \ldots & \mathfrak{c}_{pp} & \mathfrak{d}_{p1} & \ldots & \mathfrak{d}_{pp} \end{vmatrix}$$

stets den Werth t^{2p}, und es besteht daher für den Werth d der Determinante D selbst die Gleichung:

$$d = \omega t^p.$$

wobei ω eine zweite Einheitswurzel bezeichnet*); es bestehen ferner zwischen den Elementen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{d}_{\mu\nu}$ der Determinante D und ihren Adjuncten $\bar{\mathfrak{a}}_{\mu\nu}$, $\bar{\mathfrak{b}}_{\mu\nu}$, $\bar{\mathfrak{c}}_{\mu\nu}$, $\bar{\mathfrak{d}}_{\mu\nu}$ die Beziehungen:

$$\begin{array}{ll} \bar{\mathfrak{a}}_{\mu\nu} = \omega t^{p-1}\mathfrak{d}_{\mu\nu}, & \bar{\mathfrak{b}}_{\mu\nu} = -\omega t^{p-1}\mathfrak{c}_{\mu\nu}, \\ \bar{\mathfrak{c}}_{\mu\nu} = -\omega t^{p-1}\mathfrak{b}_{\mu\nu}, & \bar{\mathfrak{d}}_{\mu\nu} = \omega t^{p-1}\mathfrak{a}_{\mu\nu}. \end{array} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

Führt man diese Ausdrücke in die bekannten Gleichungen, welche zwischen den Elementen einer Determinante und ihren Adjuncten bestehen, an Stelle der letzteren ein, so erhält man die Relationen:

$$(\mathfrak{T}_2) \quad \begin{array}{c} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\mathfrak{a}_{\mu\varepsilon}\mathfrak{b}_{\mu'\varepsilon} - \mathfrak{a}_{\mu'\varepsilon}\mathfrak{b}_{\mu\varepsilon}) = 0, \quad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\mathfrak{c}_{\mu\varepsilon}\mathfrak{d}_{\mu'\varepsilon} - \mathfrak{c}_{\mu'\varepsilon}\mathfrak{d}_{\mu\varepsilon}) = 0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\mathfrak{a}_{\mu\varepsilon}\mathfrak{d}_{\mu'\varepsilon} - \mathfrak{b}_{\mu\varepsilon}\mathfrak{c}_{\mu'\varepsilon}) = \begin{array}{l} t, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu. \end{array} \end{array} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

Diese Relationen $(\mathfrak{T}_2)$ sind eine Folge der Relationen $(\mathfrak{T}_1)$, da zu ihrer Ableitung nur die Existenz dieser letzteren vorausgesetzt wurde. Man kann aber auch rückwärts von den Relationen $(\mathfrak{T}_2)$ aus wieder zu den Relationen $(\mathfrak{T}_1)$ gelangen, und es ist daher einerlei, ob man den $4p^2$ Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ von Anfang an die Bedingungen $(\mathfrak{T}_1)$ oder die Bedingungen $(\mathfrak{T}_2)$ auferlegt.

3.

Erfüllen die $4p^2$ rationalen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die Gleichungen $(\mathfrak{T}_1)$ oder die damit äquivalenten Gleichungen $(\mathfrak{T}_2)$, was von jetzt an immer vorausgesetzt werden soll, so hat nicht nur die Determinante Δ_A der Grössen A stets einen von Null verschiedenen Werth, sondern es ist auch, wenn nur die vorher mit t bezeichnete Grösse, was daher von jetzt an auch noch vorausgesetzt werden soll, positiv ist, bei reellen x der reelle Theil von $\sum_{\mu}\sum_{\mu'} b_{\mu\mu'}x_\mu x_{\mu'}$ immer eine negative Form**).

Mit Hülfe des ersten Resultates lässt sich nun aber auch zeigen, dass die im vorigen Artikel eingeführte, mit ω bezeichnete zweite Einheitswurzel stets den Werth $+1$ besitzt. Zu dem Ende bilde man das Product der beiden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} \pi i & \ldots & 0 & -\mathfrak{b}_{11} & \cdots & -\mathfrak{b}_{p1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \pi i & -\mathfrak{b}_{1p} & \cdots & -\mathfrak{b}_{pp} \\ a_{11} & \ldots & a_{p1} & \mathfrak{a}_{11} & \ldots & \mathfrak{a}_{p1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1p} & \ldots & a_{pp} & \mathfrak{a}_{1p} & \ldots & \mathfrak{a}_{pp} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \ldots & \mathfrak{a}_{1p} & \mathfrak{b}_{11} & \ldots & \mathfrak{b}_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{a}_{p1} & \ldots & \mathfrak{a}_{pp} & \mathfrak{b}_{p1} & \ldots & \mathfrak{b}_{pp} \\ \mathfrak{c}_{11} & \ldots & \mathfrak{c}_{1p} & \mathfrak{d}_{11} & \ldots & \mathfrak{d}_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{c}_{p1} & \ldots & \mathfrak{c}_{pp} & \mathfrak{d}_{p1} & \ldots & \mathfrak{d}_{pp} \end{vmatrix}$$

---

*) Es wird im nächsten Artikel bewiesen werden, dass im vorliegenden Falle ω nur den Werth $+1$ besitzen kann.

**) Zum Beweise dieser beiden Sätze vergl. Weber, Über die unendlich vielen Formen der ϑ-Function. (Journal für r. u. a. Mathematik, Bd. 74, pag. 57.)

von denen die erste, wie man leicht sieht, den Werth Δ_A besitzt, die zweite aber den Werth ωt^p hat, und zwar in der Weise, dass man die Verticalreihen der ersten mit den Horizontalreihen der zweiten componirt. Die dann entstehende neue Determinante besitzt, wie unmittelbar ersichtlich, den Werth $\Delta_A \,.\, t^p$, und es kann daher die Grösse ω, da Δ_A von Null verschieden ist, nur den Werth $+1$ haben.

4.

Man nehme nun an, dass gegeben seien eine Function $\vartheta\left[{g \atop h}\right](\!(u)\!)_a$ und $4p^2$ rationale Zahlen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{d}_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p$), welche die Bedingungen ($\mathfrak{T}_1$) oder die damit äquivalenten ($\mathfrak{T}_2$) erfüllen. Man setze dann:

$$(1)\quad A_{\mu\nu} = \mathfrak{a}_{\nu\mu}\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \mathfrak{b}_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}, \qquad (2)\quad B_{\mu\nu} = \mathfrak{c}_{\nu\mu}\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \mathfrak{d}_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}, \qquad {\scriptstyle (\mu,\nu=1,2,\ldots,p)}$$

bezeichne die Determinante der p^2 Grössen A mit Δ_A, die Adjuncte von $A_{\mu\nu}$ in dieser Determinante mit $\overline{A}_{\mu\nu}$ und definire p neue Variablen v und $\frac{1}{2}p(p+1)$ neue Parameter b implicite durch die Gleichungen:

$$(3)\quad u_\mu = \frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p} A_{\mu\nu} v_\nu, \qquad (4)\quad B_{\mu\varrho} = \frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{\nu=p} A_{\mu\nu} b_{\nu\varrho}, \qquad {\scriptstyle (\mu,\varrho=1,2,\ldots,p)}$$

oder auch explicite durch die damit äquivalenten:

$$(5)\quad v_\nu = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \overline{A}_{\mu\nu} u_\mu, \qquad (6)\quad b_{\nu\varrho} = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \overline{A}_{\mu\nu} B_{\mu\varrho}. \qquad {\scriptstyle (\nu,\varrho=1,2,\ldots,p)}$$

Unter Beachtung des vorher erhaltenen Resultates, dass die Grössen b als Parameter einer absolut convergenten Thetareihe betrachtet werden können, lässt sich dann als Transformationsproblem für die Function $\vartheta\left[{g \atop h}\right](\!(u)\!)_a$ die Aufgabe bezeichnen, die Function $\vartheta\left[{g \atop h}\right](\!(u)\!)_a$ durch Functionen $\vartheta\left[{g' \atop h'}\right](\!(v)\!)_b$ auszudrücken, und es gehört auch in das Bereich der folgenden Untersuchungen, die Frage zu beantworten, ob das so gestellte Problem für jedes System von rationalen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, welches den obigen Bedingungen genügt, lösbar ist.

Das gestellte Problem ist vollständig bestimmt, sobald die $4p^2$ rationalen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ gegeben sind. Man denke sich dieselben zur Charakterisirung der Transformation in ein quadratisches Schema von der Form:

$$T = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \mathfrak{a}_{11} & \ldots & \mathfrak{a}_{1p} & \mathfrak{b}_{11} & \ldots & \mathfrak{b}_{1p} \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \cdot\;\cdot\;\cdot & \\ \mathfrak{a}_{p1} & \ldots & \mathfrak{a}_{pp} & \mathfrak{b}_{p1} & \ldots & \mathfrak{b}_{pp} \\ \hline \mathfrak{c}_{11} & \ldots & \mathfrak{c}_{1p} & \mathfrak{d}_{11} & \ldots & \mathfrak{d}_{1p} \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \cdot\;\cdot\;\cdot & \\ \mathfrak{c}_{p1} & \ldots & \mathfrak{c}_{pp} & \mathfrak{d}_{p1} & \ldots & \mathfrak{d}_{pp} \end{array}\right|$$

gebracht. Dieses System von $4p^2$ Zahlen soll dann die Charakteristik der Transformation, die vier Räume, in denen die Grössen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ beziehlich stehen, der erste, zweite, dritte, vierte Quadrant der Charakteristik genannt werden. Wenn kein Missverständniss zu befürchten ist, soll die Charakteristik zur Abkürzung mit:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a}_{\mu\nu} & \mathfrak{b}_{\mu\nu} \\ \hline \mathfrak{c}_{\mu\nu} & \mathfrak{d}_{\mu\nu} \end{array}\right|$$

bezeichnet werden. Die in einem Quadranten vorkommenden Zahlen sollen die Elemente des Quadranten genannt werden. Besitzen alle ausserhalb der Hauptdiagonale eines Quadranten stehenden Elemente den Werth Null, die in der Hauptdiagonale stehenden Elemente aber den nämlichen Werth w, so soll dies dadurch angedeutet werden, dass man:

$$\begin{array}{ccc} w & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & w \end{array}$$

in den betreffenden Quadranten setzt; dabei ist der Fall $w = 0$ nicht ausgeschlossen, in diesem Falle soll jedoch auch die kürzere Bezeichnungsweise, dass man in die Mitte des Quadranten eine Null setzt, erlaubt sein. Endlich soll es noch gestattet sein, die zu der Charakteristik T gehörige Transformation kurz als die Transformation T zu bezeichnen, und es ist dabei immer vorausgesetzt, dass die Zahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ die Bedingungen $(\mathfrak{T}_1)$, $(\mathfrak{T}_2)$ erfüllen; die Zahl t soll die Ordnungszahl der Transformation genannt werden.

5.

Ist das im vorigen Artikel gestellte Transformationsproblem für irgend zwei specielle Charakteristiken:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a}_{\mu\nu} & \mathfrak{b}_{\mu\nu} \\ \hline \mathfrak{c}_{\mu\nu} & \mathfrak{d}_{\mu\nu} \end{array}\right| \qquad T' = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a}'_{\mu\nu} & \mathfrak{b}'_{\mu\nu} \\ \hline \mathfrak{c}'_{\mu\nu} & \mathfrak{d}'_{\mu\nu} \end{array}\right|$$

gelöst, so kann man aus diesen Lösungen immer die Lösung desselben Problems für die Charakteristik:

$$T'' = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a}''_{\mu\nu} & \mathfrak{b}''_{\mu\nu} \\ \hline \mathfrak{c}''_{\mu\nu} & \mathfrak{d}''_{\mu\nu} \end{array}\right|$$

ableiten, deren Elemente sich aus den Elementen von T und T' zusammensetzen mit Hülfe der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}''_{\mu\nu} &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} (\mathfrak{a}_{\varrho\nu}\mathfrak{a}'_{\mu\varrho} + \mathfrak{c}_{\varrho\nu}\mathfrak{b}'_{\mu\varrho}), & \mathfrak{b}''_{\mu\nu} &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} (\mathfrak{b}_{\varrho\nu}\mathfrak{a}'_{\mu\varrho} + \mathfrak{d}_{\varrho\nu}\mathfrak{b}'_{\mu\varrho}), \\ \mathfrak{c}''_{\mu\nu} &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} (\mathfrak{a}_{\varrho\nu}\mathfrak{c}'_{\mu\varrho} + \mathfrak{c}_{\varrho\nu}\mathfrak{d}'_{\mu\varrho}), & \mathfrak{d}''_{\mu\nu} &= \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} (\mathfrak{b}_{\varrho\nu}\mathfrak{c}'_{\mu\varrho} + \mathfrak{d}_{\varrho\nu}\mathfrak{d}'_{\mu\varrho}). \end{aligned} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

Unter den gemachten Voraussetzungen kann man nämlich einmal die Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a$ durch Functionen $\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b$ ausdrücken, wenn man den Zusammenhang der Grössen u und a mit den Grössen v und b in der vorher angegebenen Weise durch die Gleichungen:

$$(1)\quad A_{\mu\nu} = \mathfrak{a}_{\nu\mu}\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \mathfrak{b}_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}, \qquad (2)\quad B_{\mu\nu} = \mathfrak{c}_{\nu\mu}\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \mathfrak{d}_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}, \qquad {\scriptstyle(\mu,\,\nu = 1,\,2,\,\ldots,\,p)}$$

$$(3)\quad u_\mu = \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} A_{\mu\nu} v_\nu, \qquad (4)\quad B_{\mu\varrho} = \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} A_{\mu\nu} b_{\nu\varrho}, \qquad {\scriptstyle(\mu,\,\varrho = 1,\,2,\,\ldots,\,p)}$$

$$(5)\quad v_\nu = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \bar{A}_{\mu\nu} u_\mu, \qquad (6)\quad b_{\nu\varrho} = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \bar{A}_{\mu\nu} B_{\mu\varrho} \qquad {\scriptstyle(\nu,\,\varrho = 1,\,2,\,\ldots,\,p)}$$

definirt. Man kann weiter aber auch eine jede der bei der ersten Transformation aufgetretenen Functionen $\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b$ vermittelst der zweiten Transformation durch Functionen $\vartheta\begin{bmatrix} g'' \\ h'' \end{bmatrix}(\!(w)\!)_c$ ausdrücken, wenn man den Zusammenhang der Grössen v und b mit den Grössen w und c durch die Gleichungen:

$$(1')\quad A'_{\nu\varrho} = \mathfrak{a}'_{\varrho\nu}\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \mathfrak{b}'_{\varrho\varkappa} b_{\nu\varkappa}, \qquad (2')\quad B'_{\nu\varrho} = \mathfrak{c}'_{\varrho\nu}\pi i + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \mathfrak{d}'_{\varrho\varkappa} b_{\nu\varkappa}, \qquad {\scriptstyle(\nu,\,\varrho = 1,\,2,\,\ldots,\,p)}$$

$$(3')\quad v_\nu = \frac{1}{\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} A'_{\nu\varrho} w_\varrho, \qquad (4')\quad B'_{\nu\sigma} = \frac{1}{\pi i} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} A'_{\nu\varrho} c_{\varrho\sigma}, \qquad {\scriptstyle(\nu,\,\sigma = 1,\,2,\,\ldots,\,p)}$$

$$(5')\quad w_\varrho = \frac{\pi i}{\Delta_{A'}} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \bar{A}'_{\nu\varrho} v_\nu, \qquad (6')\quad c_{\varrho\sigma} = \frac{\pi i}{\Delta_{A'}} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \bar{A}'_{\nu\varrho} B'_{\nu\sigma} \qquad {\scriptstyle(\varrho,\,\sigma = 1,\,2,\,\ldots,\,p)}$$

definirt, wobei $\Delta_{A'}$ die Determinante $\Sigma \pm A'_{11} A'_{22} \ldots A'_{pp}$ der p^2 Grössen A', $\bar{A}'_{\nu\varrho}$ die Adjuncte von $A'_{\nu\varrho}$ in dieser Determinante bezeichnet. In Folge dessen lässt sich daher auch die ursprüngliche Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a$ durch Functionen $\vartheta\begin{bmatrix} g'' \\ h'' \end{bmatrix}(\!(w)\!)_c$ ausdrücken, und man zeigt leicht, dass die auf diese Weise entstehende Darstellung der Transformation T'' entspricht.

Die Charakteristik T'' soll die aus den Charakteristiken T und T' zusammengesetzte Charakteristik genannt werden, und es soll die Beziehung zwischen den drei Charakteristiken T, T' und T'' symbolisch durch:

$$TT' = T''$$

fixirt werden. Dass man ebenso aus mehreren Charakteristiken $T_1, T_2, \ldots, T_n$, nachdem man dieselben in eine bestimmte Reihenfolge gebracht hat, durch Zusammensetzung eine neue Charakteristik $T_1 T_2 \ldots T_n$ erzeugen kann, leuchtet unmittelbar ein, und das vorher erhaltene Resultat lässt sich entsprechend dahin verallgemeinern, dass man aus den Lösungen der den Charakteristiken $T_1, T_2, \ldots, T_n$ entsprechenden Transformationsprobleme immer durch passende Combination die Lösung des der zusammengesetzten Charakteristik $T_1 T_2 \ldots T_n$ entsprechenden Transformationsproblems erhalten kann; es soll daher auch die auf diese Weise entstandene, der zusammengesetzten Charakteristik $T_1 T_2 \ldots T_n$ entsprechende Transformation aus den Transformationen $T_1, T_2, \ldots, T_n$ zusammengesetzt genannt werden. Die Ordnungs-

zahl der zusammengesetzten Transformation ist gleich dem Producte der Ordnungszahlen der einzelnen Transformationen. Bei dieser Zusammensetzung der Transformationen gilt, wie aus der Natur der Operationen klar ist, das Associationsgesetz.

6.

Unter allen möglichen Transformationen gibt es eine, welche dadurch ausgezeichnet ist, dass bei ihrer Anwendung:

$$v_\nu = u_\nu, \qquad b_{\nu\varrho} = a_{\nu\varrho} \qquad\qquad (\nu, \varrho = 1, 2, \ldots, p)$$

wird; dieselbe soll die identische Transformation genannt und mit J bezeichnet werden; sie entsteht, wenn man $\mathfrak{a}_{11} = \cdots = \mathfrak{a}_{pp} = \mathfrak{d}_{11} = \cdots = \mathfrak{d}_{pp} = 1$, alle übrigen Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$ sowie sämmtliche Grössen $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ aber der Null gleich setzt; es ist daher:

$$J = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \cdot\;\cdot\;\cdot & \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot & & & \cdot\;\cdot\;\cdot & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right|;$$

die zugehörige Ordnungszahl hat den Werth 1. Setzt man die Transformation J auf eine der beiden möglichen Weisen mit einer beliebigen Transformation T zusammen, so entsteht, von der Bezeichnung der Variablen und Parameter abgesehen, stets die Transformation T wieder, d. h. es ist $JT = T$, $TJ = T$.

Zu einer gegebenen Transformation:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a}_{\mu\nu} & \mathfrak{b}_{\mu\nu} \\ \hline \mathfrak{c}_{\mu\nu} & \mathfrak{d}_{\mu\nu} \end{array}\right|$$

gibt es immer eine andere:

$$T^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} \dfrac{\mathfrak{d}_{\nu\mu}}{t} & -\dfrac{\mathfrak{b}_{\nu\mu}}{t} \\ \hline -\dfrac{\mathfrak{c}_{\nu\mu}}{t} & \dfrac{\mathfrak{a}_{\nu\mu}}{t} \end{array}\right|,$$

welche die Ordnungszahl t^{-1} besitzt, und welche durch die Gleichung:

$$TT^{-1} = J$$

vollständig bestimmt ist. Diese Transformation T^{-1} soll die zur Transformation T inverse Transformation genannt werden. Dass auch umgekehrt $T^{-1}T = J$, also auch T die zu T^{-1} inverse Transformation ist, leuchtet ein. Führt die Transformation T, auf eine Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ angewandt, auf Functionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g' \\ h' \end{smallmatrix}\right]((v))_b$, so führt die inverse Transformation T^{-1}, auf eine Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((v))_b$ angewandt, umgekehrt zu Functionen $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g' \\ h' \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ zurück. Sobald also das Problem, die Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ durch

Functionen $\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}((v))_b$ auszudrücken, für jede Transformation gelöst ist, erscheint auch das umgekehrte Problem, die Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((v))_b$ durch Functionen $\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}((u))_a$ auszudrücken, da es nach dem soeben Gesagten nichts anderes ist als wieder ein Transformationsproblem, von selbst gelöst.

Eine beliebige Transformation T kann man immer aus n Transformationen, von denen $n-1$, etwa $T_1, \ldots, T_{\nu-1}, T_{\nu+1}, \ldots, T_n$ willkürlich angenommen werden können, während die n^{te} durch diese und die Transformation T eindeutig bestimmt ist, zusammensetzen in der Form:

$$T = T_1 \;.\;.\;.\; T_{\nu-1} T_\nu T_{\nu+1} \;.\;.\;.\; T_n.$$

Setzt man nämlich, indem man die zu den gegebenen Transformationen $T_1, \ldots, T_{\nu-1}, T_{\nu+1}, \ldots, T_n$ inversen Transformationen mit $T_1^{-1}, \ldots, T_{\nu-1}^{-1}, T_{\nu+1}^{-1}, \ldots, T_n^{-1}$ bezeichnet:

$$T_\nu = T_{\nu-1}^{-1} \;.\;.\;.\; T_1^{-1} T T_n^{-1} \;.\;.\;.\; T_{\nu+1}^{-1}$$

und führt das so bestimmte T_ν in die obige Gleichung ein, so wird dieselbe richtig. Umgekehrt folgt aus der obigen Gleichung, sobald man sie als bestehend voraussetzt, für T_ν immer der aufgestellte Ausdruck.

Dieses Princip der Zusammensetzung einer gegebenen Transformation T aus mehreren, ist für die im Folgenden zu entwickelnde Transformationstheorie als ein fundamentales anzusehen. Durch passende Anwendung desselben kann man nämlich die Lösung des allgemeinen Transformationsproblems reduciren auf die Lösung einer geringen Anzahl einfacherer Transformationsprobleme, welche mittelst direkter Methoden behandelt werden können.

Die Ordnungszahl t der Transformation T ist in Folge der über die Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ gemachten Voraussetzungen eine positive rationale Zahl, und zwar für den allgemeinen Fall willkürlich annehmbar. Hat diese Zahl den speciellen Werth 1, so soll die zugehörige Transformation eine lineare genannt werden. Die linearen Transformationen sollen zunächst behandelt werden, und zwar sollen in den nächsten Abschnitten jene einfachsten linearen Transformationen betrachtet werden, aus denen sich, wie später gezeigt werden wird, die allgemeine zusammensetzen lässt. Diese einfachsten linearen Transformationen, die im Folgenden „elementare“ genannt werden, ergeben sich durch direkte Umformung der Thetareihe und sollen vorerst ausschliesslich von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet werden.

Zweiter Abschnitt.

Die erste elementare lineare Transformation.

1.

Eine erste Umformung der Function $\vartheta\left[{g \atop h}\right]((u))_a$ wird dadurch erhalten, dass man in der die Function darstellenden Reihe an Stelle der Summationsbuchstaben $m_1, m_2, \ldots, m_p$ p neue Summationsbuchstaben $n_1, n_2, \ldots, n_p$ einführt mit Hülfe einer linearen Substitution von nicht verschwindender Determinante:

$$
(S)\qquad
\begin{aligned}
r m_1 &= d_{11} n_1 + d_{21} n_2 + \cdots + d_{p1} n_p,\\
r m_2 &= d_{12} n_1 + d_{22} n_2 + \cdots + d_{p2} n_p,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r m_p &= d_{1p} n_1 + d_{2p} n_2 + \cdots + d_{pp} n_p,
\end{aligned}
$$

bei der r eine positive ganze Zahl, die d ganze Zahlen sind. Bezeichnet man die Determinante $\Sigma \pm d_{11} d_{22} \ldots d_{pp}$ der p^2 Zahlen d mit D und die Adjuncte von $d_{\mu\nu}$ in dieser Determinante mit $d'_{\mu\nu}$, so folgt aus den Gleichungen (S) durch Auflösung:

$$
(S')\qquad
\begin{aligned}
D n_1 &= r(d'_{11} m_1 + d'_{12} m_2 + \cdots + d'_{1p} m_p),\\
D n_2 &= r(d'_{21} m_1 + d'_{22} m_2 + \cdots + d'_{2p} m_p),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
D n_p &= r(d'_{p1} m_1 + d'_{p2} m_2 + \cdots + d'_{pp} m_p).
\end{aligned}
$$

Um Weitläufigkeiten in der Darstellung zu vermeiden, soll die Untersuchung zunächst für den Fall, wo alle Grössen g und h den Werth Null haben, durchgeführt werden. Es geht dann aus der Gleichung:

$$
(F)\qquad \vartheta((u))_a = \sum_{m_1,\ldots,m_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} m_\mu u_\mu}
$$

durch Anwendung der Substitution (S) die Gleichung:

$$
(F_1)\qquad \vartheta((u))_a = \sum_{n} e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p} b_{\nu\nu'} n_\nu n_{\nu'} + 2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} n_\nu v_\nu}
$$

hervor, wenn man die Grössen b und v durch die Gleichungen:

$$b_{\nu\nu'} = \frac{1}{r^2}\sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} d_{\nu\mu} d_{\nu'\mu'} a_{\mu\mu'}, \qquad v_\nu = \frac{1}{r}\sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{\nu\mu} u_\mu \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

definirt, und es ist dabei die auf der rechten Seite angedeutete Summation nach den n in der Weise auszuführen, dass man an Stelle des Systems der p Summationsbuchstaben $n_1, n_2, \ldots, n_p$ ein jedes der Werthesysteme treten lässt, welche sich dafür aus den Gleichungen (S') ergeben, wenn man eine jede der p Grössen $m_1, m_2, \ldots, m_p$ unabhängig von den übrigen alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lässt. Man erkennt aber leicht, dass man diese Summation auch so ausführen kann, dass man die p Grössen $n_1, n_2, \ldots, n_p$ durch die Grössen:

$$\hat{n}_1 + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_1}{\bar{D}}, \qquad \hat{n}_2 + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_2}{\bar{D}}, \ldots, \hat{n}_p + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_p}{\bar{D}},$$

in denen zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{\varrho}}_1 &= r(d'_{11}\varrho_1 + d'_{12}\varrho_2 + \cdots + d'_{1p}\varrho_p),\\
\bar{\bar{\varrho}}_2 &= r(d'_{21}\varrho_1 + d'_{22}\varrho_2 + \cdots + d'_{2p}\varrho_p),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\bar{\bar{\varrho}}_p &= r(d'_{p1}\varrho_1 + d'_{p2}\varrho_2 + \cdots + d'_{pp}\varrho_p)
\end{aligned}$$

gesetzt ist, beziehlich ersetzt, sodann für $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \ldots, \hat{n}_p$ ein jedes System von p ganzen Zahlen, für welches die Zahlen:

$$d_{11}\hat{n}_1 + \cdots + d_{p1}\hat{n}_p, \quad d_{12}\hat{n}_1 + \cdots + d_{p2}\hat{n}_p, \ldots, d_{1p}\hat{n}_1 + \cdots + d_{pp}\hat{n}_p$$

ganze Vielfache von r sind, und jedesmal für $\varrho_1\,\varrho_2 \ldots \varrho_p$ eine jede der $\bar{D}^p$ Variationen der Elemente $0, 1, 2, \ldots, \bar{D}-1$ zur p^{ten} Classe mit Wiederholung einführt, endlich die dann entstandene Summe durch die Anzahl s' der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(C') \qquad \begin{aligned}
r(d'_{11}x_1 + d'_{12}x_2 + \cdots + d'_{1p}x_p) &\equiv 0 \pmod{D},\\
r(d'_{21}x_1 + d'_{22}x_2 + \cdots + d'_{2p}x_p) &\equiv 0 \pmod{D},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r(d'_{p1}x_1 + d'_{p2}x_2 + \cdots + d'_{pp}x_p) &\equiv 0 \pmod{D}
\end{aligned}$$

theilt. Multiplicirt man dann noch linke und rechte Seite der entstandenen Gleichung mit s, so geht aus der Gleichung (F_1) die neue Gleichung:

$$(F_2) \qquad s'\vartheta(\!(u)\!)_a = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\bar{D}-1} \sum_{\hat{n}} e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p} b_{\nu\nu'}\left(\hat{n}_\nu + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_\nu}{\bar{D}}\right)\left(\hat{n}_{\nu'} + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_{\nu'}}{\bar{D}}\right) + 2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\left(\hat{n}_\nu + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_\nu}{\bar{D}}\right)v_\nu}$$

hervor, bei der die Summation in der soeben angegebenen Weise zu geschehen hat.

Die hierbei nach den $\hat{n}$ auszuführende Summation kann von der ihr anhaftenden Beschränkung befreit werden, indem man den Ausdruck:

$$F = \frac{1}{r^p}\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_p}^{0,1,\ldots,r-1} e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\left(\hat{n}_\nu + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_\nu}{\bar{D}}\right)\bar{\sigma}_\nu},$$

bei dem zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_1 &= d_{11}\sigma_1 + d_{12}\sigma_2 + \cdots + d_{1p}\sigma_p,\\ \bar{\sigma}_2 &= d_{21}\sigma_1 + d_{22}\sigma_2 + \cdots + d_{2p}\sigma_p,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \bar{\sigma}_p &= d_{p1}\sigma_1 + d_{p2}\sigma_2 + \cdots + d_{pp}\sigma_p\end{aligned}$$

gesetzt ist, hinter $\sum\limits_{\hat{n}}$ als Factor einschiebt. Da nämlich der Ausdruck F immer den Werth Null besitzt, wenn an Stelle der $\hat{n}$ solche ganze Zahlen gesetzt werden, für welche die p Grössen:

$$d_{11}\hat{n}_1 + \cdots + d_{p1}\hat{n}_p,\quad d_{12}\hat{n}_1 + \cdots + d_{p2}\hat{n}_p,\ \ldots,\ d_{1p}\hat{n}_1 + \cdots + d_{pp}\hat{n}_p$$

nicht sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind, dagegen den Werth Eins, wenn die soeben angeschriebenen p Grössen sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind, so erleidet durch Einschiebung des Factors F der Werth der Summe keine Änderung, aber man kann alsdann das Zeichen $\sum\limits_{\hat{n}}$ durch das Zeichen $\sum\limits_{\hat{n}_1,\ldots,\hat{n}_p}^{-\infty,\ldots,+\infty}$ ersetzen, das andeutet, dass nach jeder der p Grössen $\hat{n}$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu summiren ist. Multiplicirt man dann noch linke und rechte Seite der so entstandenen Gleichung mit r^p, so erhält man aus der Gleichung (F_2) die Gleichung:

$$(F_3)\qquad r^p s'\,\vartheta((u))_a$$

$$= \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\bar{D}-1}\ \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_p}^{0,1,\ldots,r-1}\ \sum_{\hat{n}_1,\ldots,\hat{n}_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p} b_{\nu\nu'}\left(\hat{n}_\nu + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_\nu}{D}\right)\left(\hat{n}_{\nu'} + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_{\nu'}}{D}\right) + 2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\left(\hat{n}_\nu + \frac{\bar{\bar{\varrho}}_\nu}{D}\right)\left(v_\nu + \frac{\bar{\sigma}_\nu}{r}\pi i\right)}.$$

Die Gleichung (F_3) geht aber unmittelbar in die gewünschte Thetaformel über, wenn man die auf ihrer rechten Seite hinter den ersten beiden Summenzeichen stehende p-fach unendliche Reihe durch die mit ihr identische Thetafunction ersetzt. Man erhält so diese Formel in der Gestalt:

$$(\mathrm{I}_0)\qquad r^p s'\,\vartheta((u))_a = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\bar{D}-1}\ \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_p}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\bar{\bar{\varrho}}}{D}\\ \frac{\bar{\sigma}}{r}\end{bmatrix}((v))_b,$$

und aus ihr durch passende Änderung der in ihr vorkommenden Variablen u, v die allgemeinere:

$$(\mathrm{I})\qquad r^p s'\,\vartheta\begin{bmatrix}g\\ h\end{bmatrix}((u))_a = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\bar{D}-1}\ \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_p}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\bar{\bar{g}} + \bar{\bar{\varrho}}}{D}\\ \frac{\bar{h} + \bar{\sigma}}{r}\end{bmatrix}((v))_b\, e^{-\frac{2\pi i}{rD}\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\bar{\bar{g}}_\nu\,\bar{\sigma}_\nu},$$

in der $g_1, \ldots, g_p, h_1, \ldots, h_p$ beliebige reelle Constanten bezeichnen, aus denen sich die $\bar{\bar{g}}$, $\bar{h}$ ebenso zusammensetzen wie die $\bar{\bar{\varrho}}$, $\bar{\sigma}$ aus den ϱ, σ.

2.

In der Formel (I) setze man nun, indem man unter $k_1, \ldots, k_p, l_1, \ldots, l_p$ beliebige reelle Constanten, unter $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ beliebige ganze Zahlen versteht und mit $\hat{k}, \hat{\hat{l}}, \hat{\varkappa}, \hat{\hat{\lambda}}$ die aus diesen Grössen gebildeten Formen:

$$\hat{k}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d_{\nu\mu} k_\nu, \qquad \hat{\hat{l}}_\mu = r \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d'_{\nu\mu} l_\nu,$$
$$\hat{\varkappa}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d_{\nu\mu} \varkappa_\nu, \qquad \hat{\hat{\lambda}}_\mu = r \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d'_{\nu\mu} \lambda_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

bezeichnet, für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$g_\mu = \frac{1}{r}\left(\hat{k}_\mu + \hat{\varkappa}_\mu\right), \qquad h_\mu = \frac{1}{\overline{D}}\left(\hat{\hat{l}}_\mu + \hat{\hat{\lambda}}_\mu\right),$$

multiplicire linke und rechte Seite der entstandenen Formel mit:

$$e^{-\frac{2\pi i}{r\overline{D}} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \hat{k}_\mu \hat{\hat{\lambda}}_\mu} = e^{-2\pi i \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} k_\nu \lambda_\nu}$$

und summire allgemein nach $\varkappa_\mu$ von 0 bis $r-1$, nach λ_μ von 0 bis $\overline{D}-1$. Man erhält dann, wenn man noch mit s die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(C) \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{1\mu} x_\mu \equiv 0 \ (\text{mod. } r), \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{2\mu} x_\mu \equiv 0 \ (\text{mod. } r), \ \ldots, \ \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{p\mu} x_\mu \equiv 0 \ (\text{mod. } r)$$

bezeichnet, die Formel:

$$(\overline{\text{I}}) \qquad \overline{D}^p s\, \vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b = \sum_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p}^{0,1,\ldots,r-1} \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_p}^{0,1,\ldots,\overline{D}-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\hat{k}+\hat{\varkappa}}{r} \\ \frac{\hat{\hat{l}}+\hat{\hat{\lambda}}}{\overline{D}} \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a \, e^{-\frac{2\pi i}{r\overline{D}} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \hat{k}_\mu \hat{\hat{\lambda}}_\mu}.$$

Die gewonnenen Formeln (I), ($\overline{\text{I}}$) stehen, wie aus dem Gange der letzten Untersuchung erhellt, in der Beziehung zu einander, dass jede von ihnen als die Umkehrung der anderen betrachtet werden kann; sie können aber auch als nicht wesentlich verschiedene Formeln angesehen werden, wenn man beachtet, dass ebenso, wie die Formel (I) dadurch entstanden ist, dass man in der die Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a$ darstellenden unendlichen Reihe an Stelle der Summationsbuchstaben m neue Summationsbuchstaben n durch die Substitution (S) einführt, die Formel ($\overline{\text{I}}$) dadurch erhalten werden kann, dass man in der die Function $\vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b$ darstellenden Reihe an Stelle der Summationsbuchstaben n die m als neue Summationsbuchstaben einführt vermittelst der zu (S) inversen Substitution (S').

3.

Es soll jetzt nachgewiesen werden, dass die durch die Formel (I) repräsentirte, durch Einführung neuer Summationsbuchstaben vermittelst einer beliebigen linearen Substitution mit rationalen Coefficienten bewirkte Umformung der Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a$

eine Transformation dieser Function im Sinne der im ersten Abschnitte entwickelten Transformationstheorie ist. Zu dem Ende definire man $4p^2$ rationale Zahlen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{d}_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p$) durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{a}_{\mu\nu} = \frac{r d'_{\mu\nu}}{D}, \qquad \mathfrak{b}_{\mu\nu} = 0, \qquad \mathfrak{c}_{\mu\nu} = 0, \qquad \mathfrak{d}_{\mu\nu} = \frac{d_{\mu\nu}}{r}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

wobei die d, d', D die in der Formel (I) vorkommenden Grössen bedeuten, beachte, dass dadurch eine lineare Transformation bestimmt ist, und führe diese Werthe in die Gleichungen (1), ..., (6) des Art. 4 des ersten Abschnitts ein. Die Gleichungen (5), (6) gehen dann in die hinter der Formel (F_1) des ersten Artikels stehenden, die Grössen v, b mit den Grössen u, a verknüpfenden Gleichungen über, und man erkennt daraus, dass die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T_I = \left|\begin{array}{c|c} \frac{r d'_{\mu\nu}}{D} & 0 \\ \hline 0 & \frac{d_{\mu\nu}}{r} \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsproblems durch die vorher aufgestellte Gleichung:

$$\text{(I)} \qquad r^p s' \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0,1,\ldots,\overline{D}-1} \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_p}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\bar{\bar{g}} + \bar{\bar{\varrho}}}{D} \\ \frac{\bar{h} + \bar{\sigma}}{r} \end{bmatrix}((v))_b \, e^{-\frac{2\pi i}{rD} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \bar{\bar{g}}_\nu \bar{\sigma}_\nu}$$

geliefert wird, wobei die Grössen v, b mit den Grössen u, a durch die Gleichungen:

$$v_\nu = \frac{1}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{\nu\mu} u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{1}{r^2} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} d_{\nu\mu} d_{\nu'\mu'} a_{\mu\mu'} \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

verknüpft sind; wobei ferner die g, h beliebige reelle Constanten bezeichnen, aus denen sich die $\bar{\bar{g}}$, $\bar{h}$ mit Hülfe der Gleichungen:

$$\bar{\bar{g}}_\nu = r \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{\nu\mu} g_\mu, \qquad \bar{h}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{\nu\mu} h_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

zusammensetzen; wobei weiter die auf der rechten Seite angedeutete Summation in der Weise auszuführen ist, dass von den in den linearen Formen:

$$\bar{\bar{\varrho}}_\nu = r \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{\nu\mu} \varrho_\mu, \qquad \bar{\sigma}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{\nu\mu} \sigma_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

vorkommenden Grössen ϱ, σ allgemein nach ϱ_μ von 0 bis $\overline{D} - 1$, nach σ_μ von 0 bis $r - 1$ zu summiren ist; wobei endlich s' die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(C') \quad r \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{1\mu} x_\mu \equiv 0 \ (\text{mod.}\ D), \quad r \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{2\mu} x_\mu \equiv 0 \ (\text{mod.}\ D), \ \ldots, \ r \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{p\mu} x_\mu \equiv 0 \ (\text{mod.}\ D)$$

bezeichnet.

Entsprechend wird die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T_I^{-1} = \left| \begin{array}{c|c} \frac{d_{\nu\mu}}{r} & 0 \\ \hline 0 & \frac{r d'_{\nu\mu}}{D} \end{array} \right|$$

bestimmten inversen Transformationsproblems durch die vorher aufgestellte Gleichung:

$$(\bar{\mathrm{I}}) \qquad \bar{D}^p s\, \vartheta\left[{k \atop l}\right]((v))_b = \sum_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p}^{0,1,\ldots,r-1} \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_p}^{0,1,\ldots,\bar{D}-1} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\hat{k} + \hat{\varkappa}}{r} \\ \frac{\hat{\hat{l}} + \hat{\hat{\lambda}}}{D} \end{bmatrix} ((u))_a\, e^{-\frac{2\pi i}{rD} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \hat{k}_\mu \hat{\hat{\lambda}}_\mu}$$

gegeben, da diese letztere durch Umkehrung der Formel (I) entstanden ist. Es sind dabei die Grössen v als unabhängige Veränderliche, die Grössen b als willkürlich gegebene Parameter zu betrachten, während die Grössen u, a als Functionen derselben durch die Gleichungen:

$$u_\mu = \frac{r}{D} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d'_{\nu\mu} v_\nu, \qquad a_{\mu\mu'} = \frac{r^2}{D^2} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \sum_{\nu'=1}^{\nu'=p} d'_{\nu\mu} d'_{\nu'\mu'} b_{\nu\nu'} \qquad {\scriptstyle (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)}$$

bestimmt werden; es bezeichnen ferner die k, l beliebige reelle Constanten, aus denen sich die $\hat{k}$, $\hat{\hat{l}}$ mit Hülfe der Gleichungen:

$$\hat{k}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d_{\nu\mu} k_\nu, \qquad \hat{\hat{l}}_\mu = r \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d'_{\nu\mu} l_\nu \qquad {\scriptstyle (\mu = 1, 2, \ldots, p)}$$

zusammensetzen; es ist weiter die Summation in der Weise auszuführen, dass von den in den linearen Formen:

$$\hat{\varkappa}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d_{\nu\mu} \varkappa_\nu, \qquad \hat{\hat{\lambda}}_\mu = r \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d'_{\nu\mu} \lambda_\nu \qquad {\scriptstyle (\mu = 1, 2, \ldots, p)}$$

vorkommenden Grössen $\varkappa$, λ allgemein nach $\varkappa_\nu$ von 0 bis $r - 1$, nach λ_ν von 0 bis $\bar{D} - 1$ zu summiren ist; es bezeichnet endlich s die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(C) \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{1\mu} x_\mu \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ r), \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{2\mu} x_\mu \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ r), \ \ldots, \ \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{p\mu} x_\mu \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ r).$$

Aus den Formeln (I), $(\bar{\mathrm{I}})$ als Hauptformeln folgen einige specielle Formeln, die für das Folgende von Wichtigkeit sind.

Setzt man in den Formeln (I), $(\bar{\mathrm{I}})$ $r = 1$ und beachtet, dass die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{1\mu} x_\mu \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ D), \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{2\mu} x_\mu \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ D), \ \ldots, \ \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{p\mu} x_\mu \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ D)$$

$\bar{D}^{p-1}$ ist, so ergiebt sich, dass die Lösungen der durch die Charakteristiken:

$$T_{I_1} = \left|\begin{array}{c|c} \frac{d'_{\mu\nu}}{D} & 0 \\ \hline 0 & d_{\mu\nu} \end{array}\right| \qquad T_{I_1}^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} d_{\nu\mu} & 0 \\ \hline 0 & \frac{d'_{\nu\mu}}{D} \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsprobleme durch die Formeln:

$$(\mathrm{I}_1) \qquad D^{p-1}\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\bar{D}-1} \vartheta\left[\begin{array}{c} \frac{\bar{\bar{g}}+\bar{\bar{\varrho}}}{D} \\ \bar{h} \end{array}\right]((v))_b,$$

$$(\bar{\mathrm{I}}_1) \qquad \bar{D}^p\ \vartheta\left[\begin{smallmatrix} k \\ l \end{smallmatrix}\right]((v))_b = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{0,1,\ldots,\bar{D}-1} \vartheta\left[\begin{array}{c} \hat{k} \\ \frac{\hat{\hat{l}}+\hat{\hat{\lambda}}}{D} \end{array}\right]((u))_a\, e^{-\frac{2\pi i}{D}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\hat{k}_\mu\hat{\hat{\lambda}}_\mu}$$

gegeben werden, bei denen die Grössen u, a mit den Grössen v, b durch die Gleichungen:

$$v_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{\nu\mu}u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'} = \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} d_{\nu\mu}d_{\nu'\mu'}a_{\mu\mu'}, \qquad (\nu,\nu'=1,2,\ldots,p)$$

oder durch die damit äquivalenten:

$$u_\mu = \frac{1}{D}\sum_{\nu=1}^{\nu=p} d'_{\nu\mu}v_\nu, \qquad a_{\mu\mu'} = \frac{1}{D^2}\sum_{\nu=1}^{\nu=p}\sum_{\nu'=1}^{\nu'=p} d'_{\nu\mu}d'_{\nu'\mu'}b_{\nu\nu'} \qquad (\mu,\mu'=1,2,\ldots,p)$$

verknüpft sind; bei denen ferner die g, h, k, l beliebige reelle Constanten bezeichnen, aus denen sich die Grössen $\bar{\bar{g}}$, $\bar{h}$, $\hat{k}$, $\hat{\hat{l}}$ mit Hülfe der Gleichungen:

$$\bar{\bar{g}}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{\nu\mu}g_\mu, \qquad \bar{h}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d_{\nu\mu}h_\mu, \qquad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

$$\hat{k}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d_{\nu\mu}k_\nu, \qquad \hat{\hat{l}}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d'_{\nu\mu}l_\nu \qquad (\mu=1,2,\ldots,p)$$

zusammensetzen; bei denen endlich die auf den rechten Seiten angedeuteten Summationen in der Weise auszuführen sind, dass nach jeder der $2p$ in den linearen Formen:

$$\bar{\bar{\varrho}}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} d'_{\nu\mu}\varrho_\mu, \qquad \hat{\hat{\lambda}}_\mu = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} d'_{\nu\mu}\lambda_\nu \qquad (\mu,\nu=1,2,\ldots,p)$$

vorkommenden Grössen ϱ, λ von 0 bis $\bar{D}-1$ zu summiren ist.

Setzt man dagegen in den Formeln (I), ($\bar{\mathrm{I}}$), indem man unter q eine ganze, zu r relativ prime Zahl versteht, $d_{11} = d_{22} = \cdots = d_{pp} = q$, alle übrigen Grössen d aber der Null gleich, so ergibt sich, dass die Lösung der durch die Charakteristiken:

$$T_{I_2} = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \frac{r}{q} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & \frac{r}{q} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \frac{q}{r} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & \frac{q}{r} \end{matrix} \end{array}\right| \qquad T_{I_2}^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \frac{q}{r} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & \frac{q}{r} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \frac{r}{q} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & \frac{r}{q} \end{matrix} \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsprobleme durch die Formeln:

$$(\mathrm{I}_2)\qquad r^p\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\bar q-1}\;\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_p}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{r(g+\varrho)}{q} \\ \frac{q(h+\sigma)}{r} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b\, e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu \sigma_\mu},$$

$$(\bar{\mathrm{I}}_2)\qquad \bar q^p\,\vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b = \sum_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p}^{0,1,\ldots,r-1}\;\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{0,1,\ldots,\bar q-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{q(k+\varkappa)}{r} \\ \frac{r(l+\lambda)}{q} \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a\, e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} k_\mu \lambda_\mu}.$$

Die Grössen u, a sind hier mit den Grössen v, b verknüpft durch die Gleichungen:

$$v_\nu = \frac{q}{r}\,u_\nu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{q^2}{r^2}\,a_{\nu\nu'}; \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

oder durch die damit äquivalenten:

$$u_\mu = \frac{r}{q}\,v_\mu, \qquad a_{\mu\mu'} = \frac{r^2}{q^2}\,b_{\mu\mu'}, \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

während die g, h, k, l beliebige reelle Grössen bezeichnen.

Aus den Formeln (I_2), $(\bar{\mathrm{I}}_2)$ ergibt sich endlich, indem man $r = 1$ setzt, dass die Lösungen der durch die Charakteristiken:

$$T_{I_3} = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \frac{1}{q} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{q} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} q & \cdots & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & q \end{matrix} \end{array}\right| \qquad T_{I_3}^{-1} = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} q & \cdots & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & q \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \frac{1}{q} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{q} \end{matrix} \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsprobleme durch die Formeln:

$$(\mathrm{I}_3)\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\bar q-1} \vartheta\begin{bmatrix} \frac{g+\varrho}{q} \\ qh \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b,$$

$$(\bar{\mathrm{I}}_3)\qquad \bar q^p\,\vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{0,1,\ldots,\bar q-1} \vartheta\begin{bmatrix} qk \\ \frac{l+\lambda}{q} \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a\, e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} k_\mu \lambda_\mu}$$

gegeben werden, bei denen die Grössen u, a mit den Grössen v, b durch die Gleichungen:

$$v_\nu = q u_\nu, \qquad b_{\nu\nu'} = q^2 a_{\nu\nu'}, \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

oder durch die damit äquivalenten:

$$u_\mu = \frac{1}{q}\,v_\mu, \qquad a_{\mu\mu'} = \frac{1}{q^2}\,b_{\mu\mu'}, \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

verknüpft sind, während die g, h, k, l beliebige reelle Grössen bezeichnen.

Dritter Abschnitt.

Die zweite elementare lineare Transformation.

1.

Eine zweite Umformung der gegebenen Function:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{m_1, \ldots, m_p}^{-\infty, \ldots, +\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}(m_\mu + g_\mu)(m_{\mu'} + g_{\mu'}) + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(m_\mu + g_\mu)(u_\mu + h_\mu \pi i)}$$

wird dadurch erhalten, dass man im allgemeinen Gliede der die Function darstellenden Reihe an Stelle der $\frac{1}{2}p(p+1)$ Parameter $a_{\mu\mu'}$ ($a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$; $\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p$) $\frac{1}{2}p(p+1)$ neue Parameter $b_{\mu\mu'}$($b_{\mu\mu'} = b_{\mu'\mu}$; $\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p$) einführt, die sich von den Parametern a nur um ganze Vielfache von πi unterscheiden.

Zu dem Ende setze man für $\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p$:

$$b_{\mu\mu'} = a_{\mu\mu'} + e_{\mu\mu'}\pi i,$$

indem man unter den e ganze Zahlen versteht, welche den Bedingungen $e_{\mu\mu'} = e_{\mu'\mu}$ ($\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p$) genügen, im Übrigen aber keiner Beschränkung unterworfen sein sollen, und führe die so definirten Grössen b an Stelle der Grössen a in die obige Reihe ein. Man erhält dann die neue Gleichung:

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{m_1, \ldots, m_p}^{-\infty, \ldots, +\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} b_{\mu\mu'}(m_\mu + g_\mu)(m_{\mu'} + g_{\mu'}) + 2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(m_\mu + g_\mu)(u_\mu + h'_\mu \pi i)}$$

$$\times\, e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} e_{\mu\mu'} g_\mu g_{\mu'} \pi i - \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} e_{\mu\mu} g_\mu \pi i},$$

wobei zur Abkürzung für $\mu = 1, 2, \ldots, p$:

$$h_\mu + \tfrac{1}{2}\, e_{\mu\mu} - \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} e_{\mu\mu'} g_{\mu'} = h'_\mu$$

gesetzt ist, und aus dieser, indem man die auf ihrer rechten Seite stehende p-fach unendliche Reihe durch die mit ihr identische Thetafunction ersetzt, sofort die Formel:

$$\text{(II)} \qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b \, e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p} e_{\nu\nu'} g_\nu g_{\nu'} \pi i - \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} e_{\nu\nu} g_\nu \pi i},$$

wobei:

$$v_\nu = u_\nu, \qquad b_{\nu\nu'} = a_{\nu\nu'} + e_{\nu\nu'}\pi i,$$
$$g'_\nu = g_\nu, \qquad h'_\nu = h_\nu + \tfrac{1}{2} e_{\nu\nu} - \sum_{\nu'=1}^{\nu'=p} e_{\nu\nu'} g_{\nu'} \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

ist.

Durch Umkehrung der Formel (II) entsteht die Formel:

$$(\overline{\text{II}}) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b = \vartheta\begin{bmatrix} k' \\ l' \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a \, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} e_{\mu\mu'} k_\mu k_{\mu'} \pi i + \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} e_{\mu\mu} k_\mu \pi i},$$

wobei:

$$u_\mu = v_\mu, \qquad a_{\mu\mu'} = b_{\mu\mu'} - e_{\mu\mu'}\pi i,$$
$$k'_\mu = k_\mu, \qquad l'_\mu = l_\mu - \tfrac{1}{2} e_{\mu\mu} + \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} e_{\mu\mu'} k_{\mu'} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

ist.

Die Formeln (II), $(\overline{\text{II}})$ stehen in der Beziehung zu einander, dass jede von ihnen als die Umkehrung der anderen betrachtet werden kann; sie können aber auch als nicht wesentlich verschieden angesehen werden, da man die Formel $(\overline{\text{II}})$ aus der Formel (II) auch dadurch erhalten kann, dass man allgemein $e_{\mu\mu'}$ durch $-e_{\mu\mu'}$ ersetzt und im Übrigen die Bezeichnung in passender Weise einrichtet.

2.

Es soll jetzt nachgewiesen werden, dass die durch die Formel (II) repräsentirte Umformung der Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a$ eine Transformation dieser Function im Sinne der im ersten Abschnitte entwickelten Transformationstheorie ist. Zu dem Ende definire man $4p^2$ rationale Zahlen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{d}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{a}_{\mu\nu} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \end{matrix} \qquad \mathfrak{b}_{\mu\nu} = 0,$$
$$\mathfrak{c}_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}, \qquad \mathfrak{d}_{\mu\nu} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \end{matrix} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

wobei die $e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$ die in der Formel (II) vorkommenden Grössen bedeuten, beachte, dass dadurch eine lineare Transformation bestimmt ist, und führe diese Werthe in die Gleichungen (1), ..., (6) des Art. 4 des ersten Abschnittes ein. Die Gleichungen (5), (6) gehen dann in die hinter der Formel (II) stehenden, die Grössen v, b mit den Grössen u, a verknüpfenden Gleichungen über, und man erkennt daraus, dass die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T_{II} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \dots & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & \dots & 0 \\ & e_{\mu\nu} & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \dots & 1 \end{array}\right| \qquad (e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu})$$

bestimmten Transformationsproblems durch die vorher aufgestellte Formel:

$$\text{(II)} \qquad \vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a = \vartheta\left[\begin{smallmatrix} g' \\ h' \end{smallmatrix}\right]((v))_b \, e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p} e_{\nu\nu'} g_\nu g_{\nu'} \pi i - \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} e_{\nu\nu} g_\nu \pi i},$$

wobei:

$$v_\nu = u_\nu, \qquad b_{\nu\nu'} = a_{\nu\nu'} + e_{\nu\nu'}\pi i,$$
$$g'_\nu = g_\nu, \qquad h'_\nu = h_\nu + \tfrac{1}{2} e_{\nu\nu} - \sum_{\nu'=1}^{\nu'=p} e_{\nu\nu'} g_{\nu'} \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \dots, p)$$

ist, geliefert wird.

Entsprechend wird die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T_{II}^{-1} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \dots & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & \dots & 0 \\ & -e_{\mu\nu} & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \dots & 1 \end{array}\right| \qquad (e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu})$$

bestimmten inversen Transformationsproblems durch die vorher aufgestellte Formel:

$$(\overline{\text{II}}) \qquad \vartheta\left[\begin{smallmatrix} k \\ l \end{smallmatrix}\right]((v))_b = \vartheta\left[\begin{smallmatrix} k' \\ l' \end{smallmatrix}\right]((u))_a \, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} e_{\mu\mu'} k_\mu k_{\mu'} \pi i + \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} e_{\mu\mu} k_\mu \pi i},$$

wobei:

$$u_\mu = v_\mu, \qquad a_{\mu\mu'} = b_{\mu\mu'} - e_{\mu\mu'}\pi i,$$
$$k'_\mu = k_\mu, \qquad l'_\mu = l_\mu - \tfrac{1}{2} e_{\mu\mu} + \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} e_{\mu\mu'} k_{\mu'}, \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \dots, p)$$

gegeben, da diese letztere durch Umkehrung der Formel (II) entstanden ist.

Vierter Abschnitt.

Die dritte elementare lineare Transformation.

1.

Aus den in Art. 1 des ersten Abschnitts angeschriebenen $2p$ Periodensystemen der Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ bilde man $2p$ Systeme correspondirender Änderungen:

$$A_{\mu\nu} = \mathfrak{a}_{\nu\mu}\pi i + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{b}_{\nu\varrho} a_{\mu\varrho}, \qquad B_{\mu\nu} = \mathfrak{c}_{\nu\mu}\pi i + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \mathfrak{d}_{\nu\varrho} a_{\mu\varrho} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

der Variablen $u_1 \mid u_2 \mid \ldots \mid u_p$, indem man in den ersten q der p Horizontalreihen die beiden darin vorkommenden Periodensysteme, nachdem man vorher noch das links stehende mit Minuszeichen versehen hat, mit einander vertauscht. Man erhält auf diese Weise die $2p$ Systeme correspondirender Änderungen:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & \ldots & a_{q1} & a_{q+1\,1} & \ldots & a_{p1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1q} & \ldots & a_{qq} & a_{q+1\,q} & \ldots & a_{pq}, \\ 0 & \ldots & 0 & \pi i & \ldots & 0, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \pi i, \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} -\pi i & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & -\pi i & 0 & \ldots & 0, \\ a_{1\,q+1} & \ldots & a_{q\,q+1} & a_{q+1\,q+1} & \ldots & a_{p\,q+1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1p} & \ldots & a_{qp} & a_{q+1\,p} & \ldots & a_{pp}, \end{array}$$

für welche:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{a}_{q+1\,q+1} = \mathfrak{a}_{q+2\,q+2} = \cdots = \mathfrak{a}_{pp} = \quad 1, & \mathfrak{b}_{11} = \mathfrak{b}_{22} = \cdots = \mathfrak{b}_{qq} = 1, \\ \mathfrak{c}_{11} = \mathfrak{c}_{22} = \cdots = \mathfrak{c}_{qq} = -1, & \mathfrak{d}_{q+1\,q+1} = \mathfrak{d}_{q+2\,q+2} = \cdots = \mathfrak{d}_{pp} = 1 \end{array}$$

ist, während alle übrigen Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ den Werth Null besitzen, und durch die eine lineare Transformation bestimmt wird. Um die dieser Transformation entsprechenden, im allgemeinen Falle durch die Gleichungen:

$$v_\nu = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \bar{A}_{\mu\nu} u_\mu, \qquad b_{\nu\varrho} = \frac{\pi i}{\Delta_A} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \bar{A}_{\mu\nu} B_{\mu\varrho} \qquad (\nu, \varrho = 1, 2, \ldots, p)$$

gegebenen Beziehungen, welche die Grössen v, b mit den Grössen u, a verknüpfen, zu erhalten, bezeichne man mit $\Delta_a^{(q)}$ die stets von Null verschiedene Determinante q^{ten} Grades:

$$\Delta_a^{(q)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qq} \end{vmatrix}$$

und für $\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, q$ mit $\bar{a}_{\varkappa\lambda}^{(q)}$ die Adjuncte von $a_{\varkappa\lambda}$ in dieser Determinante. Es ist dann:

$$v_\mu = \frac{\pi i}{\Delta_a^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \bar{a}_{\varkappa\mu}^{(q)} u_\varkappa, \qquad v_\nu = u_\nu - \frac{1}{\Delta_a^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} a_{\varkappa\nu} \bar{a}_{\varkappa\lambda}^{(q)} u_\lambda,$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, q) \qquad\qquad (\nu = q+1, q+2, \ldots, p)$$

$$b_{\mu\mu'} = \frac{\pi^2}{\Delta_a^{(q)}} \bar{a}_{\mu\mu'}^{(q)}, \qquad b_{\mu\nu} = \frac{\pi i}{\Delta_a^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \bar{a}_{\varkappa\mu}^{(q)} a_{\varkappa\nu}, \qquad b_{\nu\nu'} = a_{\nu\nu'} - \frac{1}{\Delta_a^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} \bar{a}_{\varkappa\lambda}^{(q)} a_{\varkappa\nu} a_{\lambda\nu'}.$$
$$(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, q) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q;\ \nu = q+1, q+2, \ldots, p) \qquad (\nu, \nu' = q+1, q+2, \ldots, p)$$

Die so definirte Transformation soll als dritte elementare Transformation eingeführt werden, und es handelt sich darum, die ihr entsprechende Thetaformel durch direkte Umformung der ursprünglichen Thetafunction zu erhalten.

2.

Um die gewünschte, der definirten Transformation entsprechende Umformung der Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right](\!(u)\!)_a$ zu erhalten, bedarf man einer Formel aus der Theorie der Fourier'schen Reihen, die zunächst aufgestellt werden soll.

Es bezeichne $f(x)$ eine reelle oder complexe Function der reellen Veränderlichen x, die für alle der Bedingung $-\frac{1}{2} \leqq x \lesseqgtr +\frac{1}{2}$ genügenden Werthe von x sammt ihrer ersten und zweiten Derivirten einwerthig und stetig sei; dann gilt die Gleichung:

$$(H_1) \qquad f(0) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x)\, e^{-2n x \pi i}\, dx.$$

In Bezug auf diese Gleichung ist im Auge zu behalten, dass die auf ihrer rechten Seite stehende Reihe den Charakter einer Doppelreihe hat, d. h. aus zwei selbständigen Reihen, $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ die eine, $u_{-1} + u_{-2} + \cdots + u_{-n} + \cdots$ die andere, besteht, von denen jede für sich convergirt.

Die Formel (H_1) ist ein specieller Fall einer allgemeineren, auf eine Function von mehreren Veränderlichen bezüglichen Formel, welche mit ihrer Hülfe abgeleitet werden kann. Bezeichnet nämlich $f(x_1 \mid x_2 \mid \ldots \mid x_q)$ eine reelle oder complexe Function der q reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_q$, die in dem durch die Bedingungen:

$$-\tfrac{1}{2} \leqq x_1 \lesseqgtr +\tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq x_2 \lesseqgtr +\tfrac{1}{2}, \quad \ldots, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq x_q \lesseqgtr +\tfrac{1}{2}$$

bestimmten Grössengebiete sammt ihren Derivirten $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_q}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_q^2}$ einwerthig und stetig ist, so besteht die Gleichung:

$$(H_q)\qquad f(0\,|\cdots|\,0)=\sum_{n_1,\ldots,n_q}^{-\infty,\ldots,+\infty}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}dx_1\ldots\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}dx_q f(x_1\,|\ldots|\,x_q)\,e^{-2(n_1x_1+\cdots+n_qx_q)\pi i};$$

eine jede der q auf der rechten Seite vorkommenden Summen hat dabei den Charakter einer Doppelsumme, auch kann man die q Summationen beliebig umstellen.

3.

Mit Hülfe der soeben aufgestellten Formel (H_q) soll jetzt die in Art. 1 in Aussicht gestellte Umformung der Function:

$$(F)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(\!(u)\!)_a=\sum_{m_1,\ldots,m_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}a_{\mu\mu'}(m_\mu+g_\mu)(m_{\mu'}+g_{\mu'})+2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(m_\mu+g_\mu)(u_\mu+h_\mu\pi i)}$$

durchgeführt werden. Zu dem Ende setze man:

$$f(x_1\,|\cdots|\,x_q)=e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=q}a_{\mu\mu'}x_\mu x_{\mu'}+2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q}x_\mu\left[u_\mu+\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}(m_{\mu'}+g_{\mu'})a_{\mu\mu'}+h_\mu\pi i\right]},$$

wobei die a, u, m, g, h die im allgemeinen Gliede der obigen Thetareihe vorkommenden Grössen, die x reelle Veränderliche bedeuten, und führe diese specielle Function an Stelle von $f(x_1\,|\cdots|\,x_q)$ in die Formel (H_q) ein; man erhält dann die Gleichung:

$$1=\sum_{n_1,\ldots,n_q}^{-\infty,\ldots,+\infty}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}dx_1\cdots\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}dx_q\, e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=q}a_{\mu\mu'}x_\mu x_{\mu'}+2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q}x_\mu\left[u_\mu+\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p}(m_{\mu'}+g_{\mu'})a_{\mu\mu'}+(h_\mu-n_\mu)\pi i\right]}$$

und weiter, indem man den auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Ausdruck als Factor zum allgemeinen Gliede der Thetareihe hinzunimmt, für die Function $\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(\!(u)\!)_a$ nach passender Vereinigung zusammengehöriger Theile den neuen Ausdruck:

$$(F_1)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(\!(u)\!)_a=\sum_{m_1,\ldots,m_q}^{-\infty,\ldots,+\infty}\ \sum_{m_{q+1},\ldots,m_p}^{-\infty,\ldots,+\infty}\ \sum_{n_1,\ldots,n_q}^{-\infty,\ldots,+\infty}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}dx_1\cdots\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}dx_q\, e^{\Phi},$$

wobei zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}\Phi=&\sum_{\mu=1}^{\mu=q}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=q}a_{\mu\mu'}(m_\mu+x_\mu+g_\mu)(m_{\mu'}+x_{\mu'}+g_{\mu'})\\&+2\sum_{\mu=1}^{\mu=q}(m_\mu+x_\mu+g_\mu)\left[u_\mu+\sum_{\nu=q+1}^{\nu=p}(m_\nu+g_\nu)\,a_{\mu\nu}+(h_\mu-n_\mu)\pi i\right]\\&+2\sum_{\mu=1}^{\mu=q}n_\mu g_\mu\pi i+\sum_{\nu=q+1}^{\nu=p}\sum_{\nu'=q+1}^{\nu'=p}a_{\nu\nu'}(m_\nu+g_\nu)(m_{\nu'}+g_{\nu'})+2\sum_{\nu=q+1}^{\nu=p}(m_\nu+g_\nu)(u_\nu+h_\nu\pi i)\end{aligned}$$

gesetzt ist.

Die gewünschte Umformung der Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a$ wird jetzt dadurch erhalten, dass man auf der rechten Seite der Gleichung (F_1), nachdem man sich von der Statthaftigkeit dieser Operationen überzeugt hat, die an letzter Stelle stehende, auf die Grössen $n_1, \ldots, n_q$ bezügliche Summation mit der an erster Stelle stehenden, auf die Grössen $m_1, \ldots, m_q$ bezüglichen den Platz wechseln lässt, und alsdann die auf die Grössen $m_1, \ldots, m_q$ bezügliche Summation ausführt. Man erhält dann die Gleichung:

$$(F_2) \qquad \vartheta\left[\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right]((u))_a = \sum_{n_1, \ldots, n_q}^{-\infty, \ldots, +\infty} \; \sum_{m_{q+1}, \ldots, m_p}^{-\infty, \ldots, +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_q \, e^{\Phi_0},$$

bei der zur Abkürzung:

$$\Phi_0 = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=q} a_{\mu\mu'} x_\mu x_{\mu'} + 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=q} x_\mu \left[u_\mu + \sum_{\nu=q+1}^{\nu=p} (m_\nu + g_\nu) a_{\mu\nu} - (n_\mu - h_\mu)\pi i \right]$$

$$+ 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=q} n_\mu g_\mu \pi i + \sum_{\nu=q+1}^{\nu=p} \sum_{\nu'=q+1}^{\nu'=p} a_{\nu\nu'} (m_\nu + g_\nu)(m_{\nu'} + g_{\nu'}) + 2 \sum_{\nu=q+1}^{\nu=p} (m_\nu + g_\nu)(u_\nu + h_\nu \pi i)$$

gesetzt ist, und bei der schliesslich noch die q auf die Grössen x bezüglichen Integrationen auszuführen sind.

Um dies Ziel zu erreichen, bringe man Φ_0, indem man zur Abkürzung für $\mu = 1, 2, \ldots, q$:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \left[u_\varkappa + \sum_{\nu=q+1}^{\nu=p} (m_\nu + g_\nu) a_{\varkappa\nu} - (n_\varkappa - h_\varkappa)\pi i \right] \frac{\bar{a}^{(q)}_{\varkappa\mu}}{\Delta^{(q)}_a} = k_\mu$$

setzt und die in Art. 1 definirten Grössen b und v einführt, in die Form:

$$\Phi_0 = \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=q} a_{\mu\mu'}(x_\mu + k_\mu)(x_{\mu'} + k_{\mu'}) + \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=q} b_{\mu\mu'}(n_\mu - h_\mu)(n_{\mu'} - h_{\mu'})$$

$$+ 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \sum_{\nu=q+1}^{\nu=p} b_{\mu\nu}(n_\mu - h_\mu)(m_\nu + g_\nu) + \sum_{\nu=q+1}^{\nu=p} \sum_{\nu'=q+1}^{\nu'=p} b_{\nu\nu'}(m_\nu + g_\nu)(m_{\nu'} + g_{\nu'})$$

$$+ 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=q} (n_\mu - h_\mu)(v_\mu + g_\mu \pi i) + 2 \sum_{\nu=q+1}^{\nu=p} (m_\nu + g_\nu)(v_\nu + h_\nu \pi i)$$

$$- \frac{1}{\Delta^{(q)}_a} \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=q} \bar{a}^{(q)}_{\mu\mu'} u_\mu u_{\mu'} + 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=q} g_\mu h_\mu \pi i.$$

Die Ausführung der auf der rechten Seite der Formel (F_2) stehenden Integrationen reducirt sich dann auf die Auswerthung des Integrals:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_q \, e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q} \sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=q} a_{\mu\mu'}(x_\mu + k_\mu)(x_{\mu'} + k_{\mu'})}.$$

Den auf der rechten Seite im Exponenten stehenden Ausdruck kann man aber, wenn man unter Anwendung der in den Art. 3 und 4 des ersten Abschnitts eingeführten Abkürzungen mit $p_1, p_2, \ldots, p_q$ die Constanten:

$$p_1 = a_{11}^{(1)}, \quad p_2 = \frac{a_{22}^{(2)}}{a_{11}^{(1)}}, \quad \ldots, \quad p_{q-1} = \frac{a_{q-1\,q-1}^{(q-1)}}{a_{q-2\,q-2}^{(q-2)}}, \quad p_q = \frac{a_{qq}^{(q)}}{a_{q-1\,q-1}^{(q-1)}},$$

mit $l_1, l_2, \ldots, l_q$ die Ausdrücke:

$$l_1 = k_1 + \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}(x_2 + k_2) + \cdots + \frac{a_{1\,q-1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}(x_{q-1} + k_{q-1}) + \frac{a_{1q}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}(x_q + k_q),$$

$$l_2 = k_2 + \frac{a_{23}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}(x_3 + k_3) + \cdots + \frac{a_{2q}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}(x_q + k_q),$$

$$l_{q-1} = k_{q-1} + \frac{a_{q-1\,q}^{(q-1)}}{a_{q-1\,q-1}^{(q-1)}}(x_q + k_q),$$

$$l_q = k_q$$

bezeichnet, in der Form:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=q} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=q} a_{\mu\mu'}(x_\mu + k_\mu)(x_{\mu'} + k_{\mu'}) = p_1(x_1 + l_1)^2 + p_2(x_2 + l_2)^2 + \cdots + p_q(x_q + l_q)^2$$

als Summe von q Quadraten linearer Functionen der x darstellen und erhält dann mit Hülfe der Formel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{p(x+l)^2} dx = \sqrt[+]{\frac{-\pi}{p}},$$

bei der p und l complexe, von der Integrationsvariable x unabhängige Grössen bezeichnen, deren erste der Bedingung zu genügen hat, dass ihr reeller Theil wesentlich negativ ist, und bei der die auf der rechten Seite stehende Wurzel so auszuziehen ist, dass ihr reeller Theil positiv wird, für J den Werth:

$$J = \sqrt[+]{\frac{-\pi}{p_1}}\sqrt[+]{\frac{-\pi}{p_2}} \cdots \sqrt[+]{\frac{-\pi}{p_q}},$$

wobei endlich das Product der q auf der rechten Seite stehenden Wurzeln, wie unschwer zu zeigen ist, zu der einzigen Wurzel:

$$J = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^q}{\Delta_a^{(q)}}}$$

vereinigt werden kann.

Führt man diesen Werth in die Formel (F_2) ein, ersetzt in neuer Bezeichnung die Summationsbuchstaben $m_{q+1}, m_{q+2}, \ldots, m_p$ durch $n_{q+1}, n_{q+2}, \ldots, n_p$ und definirt Grössen g', h' durch die Gleichungen:

$$g'_\mu = -h_\mu, \quad g'_\nu = g_\nu; \qquad h'_\mu = g_\mu, \quad h'_\nu = h_\nu, \qquad {\scriptstyle (\mu=1,2,\ldots,q;\ \nu=q+1,q+2,\ldots,p)}$$

so geht aus der Gleichung (F_2) die neue Gleichung:

$$(F_3)\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^q}{\Delta_a^{(q)}}}\, e^{-\frac{1}{\Delta_a^{(q)}}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=q}\overline{a}_{\mu\mu'}^{(q)}u_\mu u_{\mu'}} \cdot e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q} g_\mu h_\mu \pi i}$$

$$\times \sum_{n_1,\ldots,n_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p} b_{\nu\nu'}(n_\nu + g'_\nu)(n_{\nu'} + g'_{\nu'}) + 2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}(n_\nu + g'_\nu)(v_\nu + h'_\nu \pi i)}$$

und hieraus schliesslich, wenn man die auf der rechten Seite stehende p-fach unendliche Reihe durch die mit ihr identische Thetafunction ersetzt, die Gleichung:

$$(\mathrm{III}^{(q)})\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^q}{\Delta_a^{(q)}}}\, e^{-\frac{1}{\Delta_a^{(q)}}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=q}\overline{a}_{\mu\mu'}^{(q)}u_\mu u_{\mu'}} \cdot e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q} g_\mu h_\mu \pi i}\ \vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b$$

hervor, welche die gewünschte Umformung der ursprünglichen Function $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a$ darstellt.

4.

Das Resultat der vorhergehenden Untersuchung lässt sich nun, wie folgt, aussprechen. Die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T_{III^{(q)}} = \left|\begin{array}{cccccc|cccccc}
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\hline
-1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1
\end{array}\right|,$$

bei der:

$$\mathfrak{a}_{q+1\,q+1} = \mathfrak{a}_{q+2\,q+2} = \cdots = \mathfrak{a}_{pp} = 1, \qquad \mathfrak{b}_{11} = \mathfrak{b}_{22} = \cdots = \mathfrak{b}_{qq} = 1.$$
$$\mathfrak{c}_{11} = \mathfrak{c}_{22} = \cdots = \mathfrak{c}_{pp} = -1, \qquad \mathfrak{d}_{q+1\,q+1} = \mathfrak{d}_{q+2\,q+2} = \cdots = \mathfrak{d}_{pp} = 1$$

ist, während alle übrigen Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ den Werth Null besitzen, bestimmten Transformationsproblems wird durch die Gleichung:

$$(\mathrm{III}^{(q)})\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^q}{\Delta_a^{(q)}}}\, e^{-U} \cdot e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=q} g_\mu h_\mu \pi i}\ \vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b$$

geliefert, bei der:

$$v_\mu = \frac{\pi i}{\Delta_a^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \bar{a}_{\varkappa\mu}^{(q)} u_\varkappa, \qquad v_\nu = u_\nu - \frac{1}{\Delta_a^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} a_{\varkappa\nu} \bar{a}_{\varkappa\lambda}^{(q)} u_\lambda;$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, q) \qquad\qquad (\nu = q+1, q+2, \ldots, p)$$

$$b_{\mu\mu'} = \frac{\pi^2}{\Delta_a^{(q)}} \bar{a}_{\mu\mu'}^{(q)}, \qquad b_{\mu\nu} = \frac{\pi i}{\Delta_a^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \bar{a}_{\varkappa\mu}^{(q)} a_{\varkappa\nu}, \qquad b_{\nu\nu'} = a_{\nu\nu'} - \frac{1}{\Delta_a^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} a_{\varkappa\lambda}^{(q)} a_{\varkappa\nu} a_{\lambda\nu'};$$
$$(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, q) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q;\ \nu = q+1, q+2, \ldots, p) \qquad (\nu, \nu' = q+1, q+2, \ldots, p)$$

$$g'_\mu = -h_\mu, \quad h'_\mu = g_\mu, \qquad g'_\nu = g_\nu, \quad h'_\nu = h_\nu;$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, q) \qquad\qquad (\nu = q+1, q+2, \ldots, p)$$

$$U = \frac{1}{\Delta_a^{(q)}} \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=q} \bar{a}_{\mu\mu'}^{(q)} u_\mu u_{\mu'}$$

ist, während $\Delta_a^{(q)}$ den Werth der aus Parametern der ursprünglichen Thetafunction gebildeten Determinante:

$$\Delta_a^{(q)} = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{qq},$$

$\bar{a}_{\varkappa\lambda}^{(q)}$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, q)$ aber die Adjuncte von $a_{\varkappa\lambda}$ in dieser Determinante bezeichnet, und bei der endlich die auf der rechten Seite stehende Wurzel so auszuziehen ist, dass ihr reeller Theil positiv wird.

Durch Umkehrung der Formel $(\mathrm{III}^{(q)})$ erhält man als Lösung des durch die Charakteristik:

$$T^{-1}_{III^{(q)}} = \left|\begin{array}{cccccc|cccccc}
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & & 0 & 0 \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & & -1 & 0 \ldots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & & 0 & 0 \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & & 0 & 0 \ldots & 0 \\
\hline
1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & & 0 & 0 \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & & 0 & 0 \ldots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & & 0 & 1 \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & & 0 & 0 \ldots & 1
\end{array}\right|,$$

bei der:

$$\mathfrak{a}_{q+1\,q+1} = \mathfrak{a}_{q+2\,q+2} = \cdots = \mathfrak{a}_{pp} = 1, \qquad \mathfrak{b}_{11} = \mathfrak{b}_{22} = \cdots = \mathfrak{b}_{qq} = -1,$$
$$\mathfrak{c}_{11} = \mathfrak{c}_{22} = \cdots = \mathfrak{c}_{qq} = 1, \qquad \mathfrak{d}_{q+1\,q+1} = \mathfrak{d}_{q+2\,q+2} = \cdots = \mathfrak{d}_{pp} = 1$$

ist, während alle übrigen Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ den Werth Null besitzen, bestimmten, zu dem obigen inversen Transformationsproblems die Gleichung:

$$(\overline{\mathrm{III}}^{(q)}) \qquad \vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}((v))_b = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^q}{\Delta_b^{(q)}}}\, e^{-V} e^{2\sum_{\mu=1}^{\mu=q} k_\mu l_\mu \pi i}\, \vartheta\begin{bmatrix} k' \\ l' \end{bmatrix}((u))_a,$$

bei der jetzt die v als unabhängige Veränderliche, die b als willkürlich gegebene Parameter, die k, l als beliebige reelle Constanten zu betrachten sind, aus denen sich dann die Grössen u, a, k', l' vermittelst der Gleichungen:

$$u_\mu = -\frac{\pi i}{\Delta_b^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \bar{b}^{(q)}_{\varkappa\mu} v_\varkappa, \qquad u_\nu = v_\nu - \frac{1}{\Delta_b^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} b_{\varkappa\nu} \bar{b}^{(q)}_{\varkappa\lambda} v_\lambda;$$
$$(\mu=1,2,\ldots,q) \qquad\qquad (\nu=q+1,q+2,\ldots,p)$$

$$a_{\mu\mu'} = \frac{\pi^2}{\Delta_b^{(q)}} \bar{b}^{(q)}_{\mu\mu'}, \qquad a_{\mu\nu} = -\frac{\pi i}{\Delta_b^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \bar{b}^{(q)}_{\varkappa\mu} b_{\varkappa\nu}, \qquad a_{\nu\nu'} = b_{\nu\nu'} - \frac{1}{\Delta_b^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=q} \bar{b}^{(q)}_{\varkappa\lambda} b_{\varkappa\nu} b_{\lambda\nu'};$$
$$(\mu,\mu'=1,2,\ldots,q) \qquad (\mu=1,2,\ldots,q;\ \nu=q+1,q+2,\ldots,p) \qquad (\nu,\nu'=q+1,q+2,\ldots,p)$$

$$k'_\mu = l_\mu, \qquad l'_\mu = -k_\mu, \qquad\qquad k'_\nu = k_\nu, \qquad l'_\nu = l_\nu$$
$$(\mu=1,2,\ldots,q) \qquad\qquad (\nu=q+1,q+2,\ldots,p)$$

zusammensetzen, bei der ferner:

$$V = \frac{1}{\Delta_b^{(q)}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=q} \sum_{\varkappa'=1}^{\varkappa'=q} \bar{b}^{(q)}_{\varkappa\varkappa'} v_\varkappa v_{\varkappa'}$$

ist, während $\Delta_b^{(q)}$ den Werth der aus Parametern der Function $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}k\\l\end{smallmatrix}\right]((v))_b$ gebildeten Determinante:

$$\Delta_b^{(q)} = \Sigma \pm b_{11} b_{22} \ldots b_{qq},$$

$\bar{b}^{(q)}_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, q)$ aber die Adjuncte von $b_{\varkappa\lambda}$ in dieser Determinante bezeichnet, und bei der endlich die auf der rechten Seite stehende Wurzel so auszuziehen ist, dass ihr reeller Theil positiv wird.

Die dem Werthe $q = p$ entsprechenden Transformationen $(T_{III(p)})$, $(T^{-1}_{III(p)})$ sind von besonderer Wichtigkeit, und es sollen daher die ihnen entsprechenden Formeln zum Schlusse hier noch aufgestellt werden. Zur Ableitung dieser Formeln hat man in den Formeln $(\mathrm{III}^{(q)})$, $(\overline{\mathrm{III}}^{(q)})$ und den darauf bezüglichen Gleichungen $q = p$ zu setzen. Man erhält dann als die Lösungen der durch die Charakteristiken:

$$T_{III(p)} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & \ldots & 0 \\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \ldots & 1 \\ \hline -1 & \ldots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \ldots & -1 & & & \end{array}\right| \qquad T^{-1}_{III(p)} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & \ldots & 0 \\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \ldots & -1 \\ \hline 1 & \ldots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \ldots & 1 & & & \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsprobleme die Gleichungen:

$$(\mathrm{III}^{(p)}) \qquad \vartheta\left[\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right]((u))_a = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^p}{\Delta_a}}\; e^{-U} e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_\mu h_\mu \pi i}\; \vartheta\left[\begin{smallmatrix}g'\\h'\end{smallmatrix}\right]((v))_b,$$

$$(\overline{\mathrm{III}}^{(p)}) \qquad \vartheta\left[\begin{smallmatrix}k\\l\end{smallmatrix}\right]((v))_b = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^p}{\Delta_b}}\; e^{-V} e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} k_\mu l_\mu \pi i}\; \vartheta\left[\begin{smallmatrix}k'\\l'\end{smallmatrix}\right]((u))_a,$$

bei denen für $\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p$:

$$v_\mu = \frac{\pi i}{\Delta_a} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \bar{a}_{\varkappa\mu} u_\varkappa, \qquad u_\mu = -\frac{\pi i}{\Delta_b} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \bar{b}_{\varkappa\mu} v_\varkappa,$$

$$b_{\mu\mu'} = \frac{\pi^2}{\Delta_a} \bar{a}_{\mu\mu'}, \qquad a_{\mu\mu'} = \frac{\pi^2}{\Delta_b} \bar{b}_{\mu\mu'},$$

$$g'_\mu = -h_\mu, \quad h'_\mu = g_\mu, \qquad k'_\mu = l_\mu, \quad l'_\mu = -k_\mu,$$

$$U = \frac{1}{\Delta_a} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \bar{a}_{\mu\mu'} u_\mu u_{\mu'}, \qquad V = \frac{1}{\Delta_b} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \bar{b}_{\mu\mu'} v_\mu v_{\mu'}$$

ist, während Δ_a, Δ_b die Werthe der aus den Parametern der Thetafunctionen gebildeten Determinanten:

$$\Delta_a = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{pp}, \qquad \Delta_b = \Sigma \pm b_{11} b_{22} \ldots b_{pp},$$

$\bar{a}_{\varkappa\lambda}$, $\bar{b}_{\varkappa\lambda}$ ($\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, p$) aber die Adjuncten von $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$ in diesen Determinanten beziehlich bezeichnen, und die auf der rechten Seite stehende Wurzel in jedem Falle so auszuziehen ist, dass ihr reeller Theil positiv wird.

Fünfter Abschnitt.

Zusammensetzung der allgemeinen linearen Transformation aus elementaren.

1.

In den drei vorhergehenden Abschnitten sind drei Arten von elementaren linearen Transformationen, T_I, T_{II}, T_{III}, gewonnen worden; es soll jetzt nachgewiesen werden, dass jede lineare Transformation T sich aus solchen elementaren zusammensetzen lässt.

Zu dem Ende stelle man in T sowohl die $2p^2$ rationalen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, als auch die $2p^2$ rationalen Zahlen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ als Brüche mit gemeinsamem Nenner dar, indem man für $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\mathfrak{a}_{\mu\nu} = \frac{\alpha_{\mu\nu}}{r}, \qquad \mathfrak{b}_{\mu\nu} = \frac{\beta_{\mu\nu}}{r}, \qquad \mathfrak{c}_{\mu\nu} = \frac{\gamma_{\mu\nu}}{s}, \qquad \mathfrak{d}_{\mu\nu} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{s}$$

setzt, wobei die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze, r und s positive ganze Zahlen bezeichnen, und der Fall nicht ausgeschlossen ist, dass ein Factor von r gleichzeitig Factor aller Zahlen α, β und ein Factor von s gleichzeitig Factor aller Zahlen γ, δ ist, und ebensowenig der Fall, dass eine der beiden Zahlen r, s oder beide der Einheit gleich sind. Die lineare Transformation T nimmt dann die Gestalt:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \dfrac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & \dfrac{\beta_{\mu\nu}}{r} \\ \hline \dfrac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \dfrac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{array}\right|$$

an, und es bestehen zwischen den ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die $p(2p-1)$ Relationen:

$$(T_1)\quad \begin{gathered} \sum_{\epsilon=1}^{\epsilon=p} (\alpha_{\epsilon\mu}\gamma_{\epsilon\mu'} - \alpha_{\epsilon\mu'}\gamma_{\epsilon\mu}) = 0, \qquad \sum_{\epsilon=1}^{\epsilon=p} (\beta_{\epsilon\mu}\delta_{\epsilon\mu'} - \beta_{\epsilon\mu'}\delta_{\epsilon\mu}) = 0, \\ \sum_{\epsilon=1}^{\epsilon=p} (\alpha_{\epsilon\mu}\delta_{\epsilon\mu'} - \gamma_{\epsilon\mu}\beta_{\epsilon\mu'}) = \begin{array}{l} rs, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{array} \end{gathered} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

oder die damit äquivalenten:

$$(T_2)\quad \begin{gathered} \sum_{\epsilon=1}^{\epsilon=p} (\alpha_{\mu\epsilon}\beta_{\mu'\epsilon} - \alpha_{\mu'\epsilon}\beta_{\mu\epsilon}) = 0, \qquad \sum_{\epsilon=1}^{\epsilon=p} (\gamma_{\mu\epsilon}\delta_{\mu'\epsilon} - \gamma_{\mu'\epsilon}\delta_{\mu\epsilon}) = 0, \\ \sum_{\epsilon=1}^{\epsilon=p} (\alpha_{\mu\epsilon}\delta_{\mu'\epsilon} - \beta_{\mu\epsilon}\gamma_{\mu'\epsilon}) = \begin{array}{l} rs, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu. \end{array} \end{gathered} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

Handelt es sich nun um die Zusammensetzung der vorliegenden Transformation T aus elementaren, so hat man zunächst die Werthe der Zahlen β ins Auge zu fassen und in Bezug auf sie die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

Fall I: Die Zahlen β seien sämmtlich der Null gleich;

Fall II: Die Zahlen β seien nicht sämmtlich der Null gleich, und es besitze ihre Determinante $\Delta_\beta = \Sigma \pm \beta_{11}\beta_{22}\ldots\beta_{pp}$ einen von Null verschiedenen Werth;

Fall III: Die Zahlen β seien nicht sämmtlich der Null gleich, es besitze aber ihre Determinante Δ_β den Werth Null.

Diese drei Fälle sollen der Reihe nach behandelt werden.

2.

In dem ersten Falle, wo sämmtliche Zahlen β den Werth Null haben, kann man die lineare Transformation T, wenn man die dann stets von Null verschiedene Determinante $\Sigma \pm \delta_{11}\delta_{22}\ldots\delta_{pp}$ der p^2 Zahlen δ mit Δ_δ, und für $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p$ die Adjuncte von $\delta_{\mu\nu}$ in dieser Determinante mit $\delta'_{\mu\nu}$ bezeichnet, in die Gestalt:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} s\,\dfrac{\delta'_{\mu\nu}}{\Delta_\delta} & 0 \\ \hline \dfrac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \dfrac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{array}\right|$$

bringen, wobei die Zahlen γ, δ den $\frac{1}{2}p(p-1)$ Bedingungen:

$$\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\gamma_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon} - \gamma_{\mu'\varepsilon}\delta_{\mu\varepsilon}) = 0. \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

genügen. Ist aber dies geschehen, so lässt sich die Transformation T sofort der Gleichung:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \dfrac{\delta'_{\mu\nu}}{\Delta_\delta} & 0 \\ \hline 0 & \delta_{\mu\nu} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & \\ 0 & \ldots & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline \sum_\varepsilon \gamma_{\mu\varepsilon}\delta_{\nu\varepsilon} & \begin{matrix} 1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & \\ 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} s & \ldots & 0 \\ & \ldots & \\ 0 & \ldots & s \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \frac{1}{s} & \ldots & 0 \\ & \ldots & \\ 0 & \ldots & \frac{1}{s} \end{matrix} \end{array}\right|$$

entsprechend aus elementaren linearen Transformationen vom Typus T_I, T_{II}, T_I beziehlich zusammensetzen.

Eine jede lineare Transformation, bei der die Zahlen β sämmtlich den Werth Null haben, soll eine singuläre genannt werden. Das vorher gefundene Resultat lässt sich dann so aussprechen, dass jede singuläre Transformation aus drei, oder in speciellen Fällen aus weniger als drei, elementaren singulären Transformationen vom Typus T_I, T_{II} zusammengesetzt werden kann.

3.

Bevor zur Behandlung des zweiten und dritten Falles geschritten wird, soll zur Orientirung Folgendes vorausgeschickt werden.

Setzt man zwei singuläre Transformationen:

$$S' = \left| \begin{array}{c|c} \mathfrak{a}'_{\mu\nu} & 0 \\ \hline \mathfrak{c}'_{\mu\nu} & \mathfrak{d}'_{\mu\nu} \end{array} \right| \qquad S'' = \left| \begin{array}{c|c} \mathfrak{a}''_{\mu\nu} & 0 \\ \hline \mathfrak{c}''_{\mu\nu} & \mathfrak{d}''_{\mu\nu} \end{array} \right|$$

mit der zu einer beliebigen Zahl $q \overline{\overline{<}} p$ gehörigen, im Anfange des Art. 4 des vierten Abschnitts angeschriebenen elementaren Transformation $T_{III(q)}$ in der Reihenfolge S', $T_{III(q)}$, S'' zu einer Transformation:

$$\overline{T} = S' T_{III(q)} S''$$

zusammen, so ist in der Transformation:

$$\overline{T} = \left| \begin{array}{c|c} \bar{\mathfrak{a}}_{\mu\nu} & \bar{\mathfrak{b}}_{\mu\nu} \\ \hline \bar{\mathfrak{c}}_{\mu\nu} & \bar{\mathfrak{d}}_{\mu\nu} \end{array} \right|$$

für jedes μ und ν von 1 bis p:

$$\bar{\mathfrak{a}}_{\mu\nu} = \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \mathfrak{c}'_{\varepsilon\nu} \mathfrak{a}''_{\mu\varepsilon} + \sum_{\eta=q+1}^{\eta=p} \mathfrak{a}'_{\eta\nu} \mathfrak{a}''_{\mu\eta}, \qquad \bar{\mathfrak{b}}_{\mu\nu} = \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \mathfrak{d}'_{\varepsilon\nu} \mathfrak{a}''_{\mu\varepsilon},$$

$$\bar{\mathfrak{c}}_{\mu\nu} = \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \mathfrak{c}'_{\varepsilon\nu} \mathfrak{c}''_{\mu\varepsilon} + \sum_{\eta=q+1}^{\eta=p} \mathfrak{a}'_{\eta\nu} \mathfrak{c}''_{\mu\eta} - \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \mathfrak{a}'_{\varepsilon\nu} \mathfrak{d}''_{\mu\varepsilon} + \sum_{\eta=q+1}^{\eta=p} \mathfrak{c}'_{\eta\nu} \mathfrak{d}''_{\mu\eta}, \quad \bar{\mathfrak{d}}_{\mu\nu} = \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \mathfrak{d}'_{\varepsilon\nu} \mathfrak{c}''_{\mu\varepsilon} + \sum_{\eta=q+1}^{\eta=p} \mathfrak{d}'_{\eta\nu} \mathfrak{d}''_{\mu\eta},$$

und man schliesst daraus, dass die zu der Transformation $\overline{T}$ gehörige Determinante $\Delta_{\bar{\mathfrak{b}}} = \Sigma \pm \bar{\mathfrak{b}}_{11} \bar{\mathfrak{b}}_{22} \dots \bar{\mathfrak{b}}_{pp}$ immer einen von Null verschiedenen Werth besitzt, wenn $q = p$ ist, dass dagegen, wenn $q < p$ ist, die Determinante $\Delta_{\bar{\mathfrak{b}}}$ den Werth Null besitzt, und zugleich ihre sämmtlichen Unterdeterminanten $p - 1^{\text{ten}}$, $p - 2^{\text{ten}}, \dots, q + 1^{\text{ten}}$ Grades, nicht aber ihre sämmtlichen Unterdeterminanten q^{ten} Grades verschwinden.

4.

Mit Rücksicht auf das im vorigen Artikel gewonnene Resultat soll jetzt zunächst untersucht werden, ob jede lineare Transformation T, bei der die Determinante Δ_β einen von Null verschiedenen Werth besitzt, sich aus zwei passend gewählten singulären Transformationen S', S'' und der Transformation $T_{III(p)}$ der Gleichung:

$$T = S' T_{III(p)} S''$$

entsprechend zusammensetzen lässt.

Bei der Durchführung dieser Untersuchung findet man ohne Mühe, dass die Transformationen S', S'' auf unendlich viele Weisen so bestimmt werden können, dass

die letzte Gleichung erfüllt ist, und dass man alle der aufgestellten Gleichung genügenden Paare zusammengehöriger Transformationen S', S'' erhält, wenn man in S'' an Stelle des Systems der p^2 Grössen $\mathfrak{b}''$ alle möglichen Systeme von p^2 rationalen Zahlen, deren Determinante $\varDelta_{\mathfrak{b}''}$ nicht verschwindet, einführt und dann zu jedem solchen Systeme an Stelle der übrigen in S', S'' vorkommenden Grössen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{c}''$ die aus den Gleichungen:

$$\mathfrak{a}'_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \frac{r\tilde{\beta}_{\varkappa\nu}}{\varDelta_{\beta}} \frac{\tilde{\mathfrak{b}}''_{\varkappa\mu}}{\varDelta_{\mathfrak{b}''}}, \qquad \mathfrak{c}'_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \frac{\alpha_{\varkappa\nu}}{r} \mathfrak{b}''_{\varkappa\mu}, \qquad \mathfrak{b}'_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \frac{\beta_{\varkappa\nu}}{r} \mathfrak{b}''_{\varkappa\mu}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\mathfrak{a}''_{\mu\nu} = \frac{\tilde{\mathfrak{b}}''_{\mu\nu}}{\varDelta_{\mathfrak{b}''}}, \qquad \mathfrak{c}''_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=p} \frac{\delta_{\mu\lambda}}{s} \frac{r\tilde{\beta}_{\varkappa\lambda}}{\varDelta_{\beta}} \frac{\tilde{\mathfrak{b}}''_{\varkappa\nu}}{\varDelta_{\mathfrak{b}''}},$$

in denen allgemein $\tilde{\beta}_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\beta_{\mu\nu}$ in der Determinante $\varDelta_{\beta}$, $\tilde{\mathfrak{b}}''_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\mathfrak{b}''_{\mu\nu}$ in der Determinante $\varDelta_{\mathfrak{b}''}$ bezeichnet, sich ergebenden rationalen Zahlen treten lässt.

Durch Einführung passend gewählter specieller Werthe für die Grössen $\mathfrak{b}''$ kann man den Transformationen S', S'' eine besonders einfache Form geben. Setzt man speciell $\mathfrak{b}''_{11} = \mathfrak{b}''_{22} = \cdots = \mathfrak{b}''_{pp} = r$, alle übrigen Grössen $\mathfrak{b}''$ aber der Null gleich, so wird:

$$\mathfrak{a}'_{\mu\nu} = \frac{\tilde{\beta}_{\mu\nu}}{\varDelta_{\beta}}, \qquad \mathfrak{c}'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu}, \qquad \mathfrak{b}'_{\mu\nu} = \beta_{\mu\nu}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\mathfrak{a}''_{\mu\nu} = \begin{matrix} \frac{1}{r}, & \text{wenn } \nu = \mu, \\ 0, & \text{wenn } \nu \gtrless \mu, \end{matrix} \qquad \mathfrak{c}''_{\mu\nu} = \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \frac{\tilde{\beta}_{\nu\varepsilon}\delta_{\mu\varepsilon}}{s\varDelta_{\beta}}, \qquad \mathfrak{b}''_{\mu\nu} = \begin{matrix} r, & \text{wenn } \nu = \mu, \\ 0, & \text{wenn } \nu \gtrless \mu. \end{matrix}$$

Bildet man die diesen Zahlen entsprechenden Transformationen S', S'', indem man zugleich die mit $\tilde{\beta}_{\mu\nu}$ bezeichnete Adjuncte von $\beta_{\mu\nu}$ in der Determinante $\varDelta_{\beta}$ von jetzt an mit $\beta'_{\mu\nu}$ bezeichnet, und führt dieselben dann zugleich mit den durch die Symbole T, $T_{III(p)}$ bezeichneten Transformationen in die Gleichung $T = S'\,T_{III(p)}S''$ ein, so erhält man die Gleichung:

$$\left|\begin{array}{c|c} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & \frac{\beta_{\mu\nu}}{r} \\ \hline \frac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \frac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \frac{\beta'_{\mu\nu}}{\varDelta_{\beta}} & 0 \\ \hline \alpha_{\mu\nu} & \beta_{\mu\nu} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & -1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \frac{1}{r} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \frac{1}{r} \end{matrix} & 0 \\ \hline \sum_{\varepsilon} \frac{\delta_{\mu\varepsilon}\beta'_{\nu\varepsilon}}{s\varDelta_{\beta}} & \begin{matrix} r & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & r \end{matrix} \end{array}\right|$$

und weiter, indem man auf der rechten Seite sowohl die an erster, wie die an dritter Stelle stehende singuläre Transformation nach dem in Art. 2 Gezeigten aus elementaren Transformationen zusammensetzt, die Gleichung:

$$\left|\begin{array}{c|c}\dfrac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & \dfrac{\beta_{\mu\nu}}{r}\\ \hline \dfrac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \dfrac{\delta_{\mu\nu}}{s}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c}\dfrac{\beta'_{\mu\nu}}{\Delta_\beta} & 0 \\ \hline 0 & \beta_{\mu\nu}\end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1&\cdots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot\\0&\cdots&1\end{matrix} & 0\\ \hline \sum\limits_s \alpha_{\mu s}\beta_{\nu s} & \begin{matrix}1&\cdots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot\\0&\cdots&1\end{matrix}\end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix}1&\cdots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot\\0&\cdots&1\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}-1&\cdots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot\\0&\cdots&-1\end{matrix} & 0\end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\frac{1}{rs\Delta_\beta}&\cdots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot\\0&\cdots&\frac{1}{rs\Delta_\beta}\end{matrix} & 0\\ \hline 0 & \begin{matrix}rs\Delta_\beta&\cdots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot\\0&\cdots&rs\Delta_\beta\end{matrix}\end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1&\cdots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot\\0&\cdots&1\end{matrix} & 0\\ \hline rs\Delta_\beta \sum\limits_s \delta_{\mu s}\beta'_{\nu s} & \begin{matrix}1&\cdots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot\\0&\cdots&1\end{matrix}\end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix}s\Delta_\beta&\cdots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot\\0&\cdots&s\Delta_\beta\end{matrix} & 0\\ \hline 0 & \begin{matrix}\frac{1}{s\Delta_\beta}&\cdots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot\\0&\cdots&\frac{1}{s\Delta_\beta}\end{matrix}\end{array}\right|,$$

welche die gewünschte Zusammensetzung der gegebenen Transformation aus elementaren darstellt.

5.

Im Anschlusse an das am Ende des Art. 3 ausgesprochenen Resultates soll jetzt weiter untersucht werden, ob jede lineare Transformation T, bei der nicht nur die Determinante Δ_β sondern auch die sämmtlichen Unterdeterminanten $p-1^{\text{ten}}$, $p-2^{\text{ten}}, \ldots, q+1^{\text{ten}}$ Grades von Δ_β verschwinden, von den Unterdeterminanten q^{ten} Grades aber wenigstens eine einen von Null verschiedenen Werth besitzt, sich immer aus zwei passend gewählten singulären Transformationen S', S'' und der Transformation $T_{III(q)}$ der Gleichung:

$$T = S'\, T_{III(q)}\, S''$$

entsprechend zusammensetzen lässt.

Bei der Durchführung dieser Untersuchung mag für das Folgende zunächst vorausgesetzt werden, dass speciell die Unterdeterminante q^{ten} Grades:

$$\nabla_\beta = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1q} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{q1} & \beta_{q2} & \cdots & \beta_{qq} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sei. Man findet dann ebenso wie in dem früheren Falle, wo Δ_β von Null verschieden war, dass die Transformationen S', S'' auf unendlich viele Weisen so bestimmt werden können, dass die Gleichung $T = S'\, T_{III(q)}\, S''$ erfüllt ist.

Für den vorliegenden Zweck genügt es, unter den unbegrenzt vielen möglichen Bestimmungen der Grössen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{b}''$ eine solche herauszugreifen, bei der die

Transformationen S', S'' eine übersichtliche Form erhalten. Zu dem Ende bezeichne man mit $\grave{\beta}_{\varepsilon\varepsilon'}$ $(\varepsilon, \varepsilon' = 1, 2, \ldots, q)$ die Adjuncte von $\beta_{\varepsilon\varepsilon'}$ in der Determinante ∇_β, setze:

$$\varrho_{\eta\varepsilon} = \frac{1}{\nabla_\beta} \sum_{\varepsilon'=1}^{\varepsilon'=q} \beta_{\varepsilon'\eta}\, \grave{\beta}_{\varepsilon'\varepsilon}, \qquad \sigma_{\eta\varepsilon} = \frac{1}{\nabla_\beta} \sum_{\varepsilon'=1}^{\varepsilon'=q} \beta_{\eta\varepsilon'}\, \grave{\beta}_{\varepsilon\varepsilon'} \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon = 1, 2, \ldots, q \\ \eta = q+1, q+2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

und definire Grössen ζ, θ, ξ durch die Gleichungen:

$$\zeta_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} - \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \sigma_{\mu\varepsilon}\alpha_{\varepsilon\nu}, \qquad \begin{pmatrix} \mu = q+1, q+2, \ldots, p \\ \nu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{1}{rs} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \sum_{\eta=q+1}^{\eta=p} \frac{\alpha_{\varepsilon\eta}\grave{\beta}_{\varepsilon\nu}}{\nabla_\beta} \left(\delta_{\mu\eta} - \sum_{\varepsilon'=1}^{\varepsilon'=q} \varrho_{\eta\varepsilon'}\delta_{\mu\varepsilon'}\right), \qquad \begin{pmatrix} \mu = q+1, q+2, \ldots, p \\ \nu = 1, 2, \ldots, q \end{pmatrix}$$

$$\xi_{\mu\nu} = \frac{1}{rs} \left(\delta_{\mu\nu} - \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \varrho_{\nu\varepsilon}\delta_{\mu\varepsilon}\right), \qquad \begin{pmatrix} \mu = q+1, q+2, \ldots, p \\ \nu = q+1, q+2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

Grössen φ, ψ durch die Gleichungen:

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{1}{s} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \frac{\delta_{\mu\varepsilon}\grave{\beta}_{\nu\varepsilon}}{\nabla_\beta}, \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots, p \\ \nu = 1, 2, \ldots, q \end{pmatrix}$$

$$\psi_{\mu\nu} = \frac{1}{rs^2} \sum_{\eta=q+1}^{\eta=p} \left(\gamma_{\mu\eta} - \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=q} \sum_{\varepsilon'=1}^{\varepsilon'=q} \frac{\alpha_{\varepsilon\eta}\delta_{\mu\varepsilon'}\grave{\beta}_{\varepsilon\varepsilon'}}{\nabla_\beta}\right) \left(\delta_{\nu\eta} - \sum_{\varepsilon''=1}^{\varepsilon''=q} \varrho_{\eta\varepsilon''}\delta_{\nu\varepsilon''}\right). \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots, p \\ \nu = q+1, q+2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

Eine Bestimmung der gewünschten Art wird dann durch die Gleichungen:

$$S' = \left|\begin{array}{cccccc|cccccc}
\frac{\grave{\beta}_{11}}{\nabla_\beta} & \ldots & \frac{\grave{\beta}_{1q}}{\nabla_\beta} & 0 & \ldots & 0 & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\
\frac{\grave{\beta}_{q1}}{\nabla_\beta} & \ldots & \frac{\grave{\beta}_{qq}}{\nabla_\beta} & 0 & \ldots & 0 & & & 0 & & & \\
\zeta_{q+1\,1} & \ldots & \zeta_{q+1\,q} & \zeta_{q+1\,q+1} & \ldots & \zeta_{q+1\,p} & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\
\zeta_{p1} & \ldots & \zeta_{pq} & \zeta_{p\,q+1} & \ldots & \zeta_{pp} & & & & & & \\
\hline
\alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1q} & \alpha_{1\,q+1} & \ldots & \alpha_{1p} & \beta_{11} & \ldots & \beta_{1q} & \beta_{1\,q+1} & \ldots & \beta_{1p} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\alpha_{q1} & \ldots & \alpha_{qq} & \alpha_{q\,q+1} & \ldots & \alpha_{qp} & \beta_{q1} & \ldots & \beta_{qq} & \beta_{q\,q+1} & \ldots & \beta_{qp} \\
\theta_{q+1\,1} & \ldots & \theta_{q+1\,q} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \xi_{q+1\,q+1} & \ldots & \xi_{q+1\,p} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\theta_{p1} & \ldots & \theta_{pq} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \xi_{p\,q+1} & \ldots & \xi_{pp}
\end{array}\right|,$$

$$S'' = \left|\begin{array}{cccccc|cccccc}
\frac{1}{r} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\
0 & \dots & \frac{1}{r} & 0 & \dots & 0 & & & & & & \\
\frac{\sigma_{q+1\,1}}{r} & \dots & \frac{\sigma_{q+1\,q}}{r} & \frac{1}{r} & \dots & 0 & & & & 0 & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\
\frac{\sigma_{p\,1}}{r} & \dots & \frac{\sigma_{p\,q}}{r} & 0 & \dots & \frac{1}{r} & & & & & & \\
\hline
\varphi_{11} & \dots & \varphi_{1\,q} & \psi_{1\,q+1} & \dots & \psi_{1\,p} & r & \dots & 0 & -r\sigma_{q+1\,1} & \dots & -r\sigma_{p\,1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\varphi_{q\,1} & \dots & \varphi_{q\,q} & \psi_{q\,q+1} & \dots & \psi_{q\,p} & 0 & \dots & r & -r\sigma_{q+1\,q} & \dots & -r\sigma_{p\,q} \\
\varphi_{q+1\,1} & \dots & \varphi_{q+1\,q} & \psi_{q+1\,q+1} & \dots & \psi_{q+1\,p} & 0 & \dots & 0 & r & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\varphi_{p\,1} & \dots & \varphi_{p\,q} & \psi_{p\,q+1} & \dots & \psi_{p\,p} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & r
\end{array}\right|$$

dargestellt. Aus diesen singulären Transformationen S', S'' und der Transformation $T_{III(q)}$ kann man die gegebene lineare Transformation T in der Form:

$$T = S' \, T_{III(q)} \, S''$$

zusammensetzen, und man kann daher die Transformation T auch, da jede der beiden Transformationen S', S'' als singuläre Transformation sich nach Art. 2 aus elementaren Transformationen vom Typus T_I, T_{II} zusammensetzen lässt, $T_{III(q)}$ aber selbst eine elementare Transformation ist, ohne Mühe aus elementaren Transformationen zusammensetzen.

Auf Grund des gewonnenen Resultates kann man, wie in Art. 5 des ersten Abschnittes gezeigt ist, auch die der Transformation T entsprechende Thetaformel aus Thetaformeln, welche elementaren Transformationen entsprechen, zusammensetzen. Hat man aber im Laufe der Untersuchungen des folgenden Abschnitts schon diejenige Thetaformel aufgestellt, welche der im vorigen Artikel behandelten Transformation T, bei der Δ_β einen von Null verschiedenen Werth besitzt, entspricht, so kann man mit deren Hülfe die der hier vorliegenden Transformation T entsprechende Thetaformel auf bedeutend einfacherem Wege erhalten. Es beruht dies darauf, dass man die vorliegende Transformation T in der Form:

$$T = \widetilde{T}_{III(p-q)} \, \dot{T}$$

aus der Transformation:

$$\widetilde{T}_{III(p-q)} = T_{III(p)}\,T^{-1}_{III(q)} = \left|\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\
\hline
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right|$$

und der Transformation:

$$\dot{T} = \left|\begin{array}{cccccc|cccccc}
\frac{\alpha_{11}}{r} & \dots & \frac{\alpha_{1q}}{r} & \frac{\beta_{1\,q+1}}{r} & \dots & \frac{\beta_{1p}}{r} & \frac{\beta_{11}}{r} & \dots & \frac{\beta_{1q}}{r} & -\frac{\alpha_{1\,q+1}}{r} & \dots & -\frac{\alpha_{1p}}{r} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\alpha_{q1}}{r} & \dots & \frac{\alpha_{qq}}{r} & \frac{\beta_{q\,q+1}}{r} & \dots & \frac{\beta_{qp}}{r} & \frac{\beta_{q1}}{r} & \dots & \frac{\beta_{qq}}{r} & -\frac{\alpha_{q\,q+1}}{r} & \dots & -\frac{\alpha_{qp}}{r} \\
\frac{\alpha_{q+1\,1}}{r} & \dots & \frac{\alpha_{q+1\,q}}{r} & \frac{\beta_{q+1\,q+1}}{r} & \dots & \frac{\beta_{q+1\,p}}{r} & \frac{\beta_{q+1\,1}}{r} & \dots & \frac{\beta_{q+1\,q}}{r} & -\frac{\alpha_{q+1\,q+1}}{r} & \dots & -\frac{\alpha_{q+1\,p}}{r} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\alpha_{p1}}{r} & \dots & \frac{\alpha_{pq}}{r} & \frac{\beta_{p\,q+1}}{r} & \dots & \frac{\beta_{pp}}{r} & \frac{\beta_{p1}}{r} & \dots & \frac{\beta_{pq}}{r} & -\frac{\alpha_{p\,q+1}}{r} & \dots & -\frac{\alpha_{pp}}{r} \\
\hline
\frac{\gamma_{11}}{s} & \dots & \frac{\gamma_{1q}}{s} & \frac{\delta_{1\,q+1}}{s} & \dots & \frac{\delta_{1p}}{s} & \frac{\delta_{11}}{s} & \dots & \frac{\delta_{1q}}{s} & -\frac{\gamma_{1\,q+1}}{s} & \dots & -\frac{\gamma_{1p}}{s} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\gamma_{q1}}{s} & \dots & \frac{\gamma_{qq}}{s} & \frac{\delta_{q\,q+1}}{s} & \dots & \frac{\delta_{qp}}{s} & \frac{\delta_{q1}}{s} & \dots & \frac{\delta_{qq}}{s} & -\frac{\gamma_{q\,q+1}}{s} & \dots & -\frac{\gamma_{qp}}{s} \\
\frac{\gamma_{q+1\,1}}{s} & \dots & \frac{\gamma_{q+1\,q}}{s} & \frac{\delta_{q+1\,q+1}}{s} & \dots & \frac{\delta_{q+1\,p}}{s} & \frac{\delta_{q+1\,1}}{s} & \dots & \frac{\delta_{q+1\,q}}{s} & -\frac{\gamma_{q+1\,q+1}}{s} & \dots & -\frac{\gamma_{q+1\,p}}{s} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{\gamma_{p1}}{s} & \dots & \frac{\gamma_{pq}}{s} & \frac{\delta_{p\,q+1}}{s} & \dots & \frac{\delta_{pp}}{s} & \frac{\delta_{p1}}{s} & \dots & \frac{\delta_{pq}}{s} & -\frac{\gamma_{p\,q+1}}{s} & \dots & -\frac{\gamma_{pp}}{s}
\end{array}\right|,$$

bei der die Determinante der p^2 im zweiten Quadranten stehenden Grössen von Null verschieden ist, zusammensetzen kann.

6.

Es erübrigt jetzt noch, im Anschlusse an das im Eingange des vorigen Artikels Bemerkte, den allgemeineren Fall zu behandeln, der durch die Voraussetzung charakterisirt ist, dass die Determinante:

$$\nabla_{\beta}^{(m,n)} = \begin{vmatrix} \beta_{m_1 n_1} & \beta_{m_1 n_2} & \cdots & \beta_{m_1 n_q} \\ \beta_{m_2 n_1} & \beta_{m_2 n_2} & \cdots & \beta_{m_2 n_q} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{m_q n_1} & \beta_{m_q n_2} & \cdots & \beta_{m_q n_q} \end{vmatrix},$$

wobei $m_1, m_2, \ldots, m_q$ und $n_1, n_2, \ldots, n_q$ zwei beliebige Combinationen der Zahlen $1, 2, \ldots, p$ zur q^{ten} Classe ohne Wiederholung bedeuten, eine nicht verschwindende Unterdeterminante q^{ten} Grades von Δ_β ist, während alle Unterdeterminanten höheren Grades verschwinden. Dieser allgemeinere Fall kann aber unter Benutzung der im vorigen Artikel für den speciellen Fall gewonnenen Resultate leicht erledigt werden.

Zu dem Ende bezeichne man die von $m_1, m_2, \ldots, m_q$ verschiedenen Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ in der natürlichen Reihenfolge mit $m_{q+1}, m_{q+2}, \ldots, m_p$, ebenso die von $n_1, n_2, \ldots, n_q$ verschiedenen Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, p$ in der natürlichen Reihenfolge mit $n_{q+1}, n_{q+2}, \ldots, n_p$ und definire alsdann zwei elementare lineare Transformationen vom Typus T_I durch die Gleichungen:

$$K' = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \varkappa'_{11} & \cdots & \varkappa'_{1p} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ \varkappa'_{p1} & \cdots & \varkappa'_{pp} & & & \\ \hline & & & \varkappa'_{11} & \cdots & \varkappa'_{1p} \\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \varkappa'_{p1} & \cdots & \varkappa'_{pp} \end{array}\right|, \qquad K'' = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \varkappa''_{11} & \cdots & \varkappa''_{1p} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ \varkappa''_{p1} & \cdots & \varkappa''_{pp} & & & \\ \hline & & & \varkappa''_{11} & \cdots & \varkappa''_{1p} \\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \varkappa''_{p1} & \cdots & \varkappa''_{pp} \end{array}\right|,$$

wobei für jedes ϱ von 1 bis p:

$$\varkappa'_{\varrho n_\varrho} = 1, \qquad \varkappa''_{m_\varrho \varrho} = 1$$

ist, während alle übrigen Grössen $\varkappa'$, $\varkappa''$ den Werth Null besitzen. Bezeichnet man dann die zu den Transformationen K', K'' inversen Transformationen mit K'^{-1}, K''^{-1} und setzt aus diesen und der Transformation T eine neue Transformation:

$$\overline{T} = \left|\begin{array}{c|c} \dfrac{\overline{\alpha}_{\mu\nu}}{r} & \dfrac{\overline{\beta}_{\mu\nu}}{r} \\ \hline \dfrac{\overline{\gamma}_{\mu\nu}}{s} & \dfrac{\overline{\delta}_{\mu\nu}}{s} \end{array}\right|$$

der Gleichung:

$$\overline{T} = K'^{-1}\, T K''^{-1}$$

gemäss zusammen, so ist in dieser für jedes μ und ν von 1 bis p:

$$\overline{\alpha}_{\mu\nu} = \alpha_{m_\mu n_\nu}, \quad \overline{\beta}_{\mu\nu} = \beta_{m_\mu n_\nu}, \quad \overline{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{m_\mu n_\nu}, \quad \overline{\delta}_{\mu\nu} = \delta_{m_\mu n_\nu};$$

es hat folglich in der Transformation $\overline{T}$ die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_{\bar{\beta}} = \Sigma \pm \bar{\beta}_{11}\bar{\beta}_{22}\ldots\bar{\beta}_{qq}$ der Determinante $\varDelta_{\bar{\beta}}$, da sie mit der Determinante $\nabla_{\beta}^{(m,n)}$ identisch ist, einen von Null verschiedenen Werth, während alle Unterdeterminanten $q+1^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, und es lässt sich daher nach dem im vorigen Artikel Bewiesenen die Transformation $\overline{T}$ aus zwei singulären Transformationen $\overline{S}'$, $\overline{S}''$ und der Transformation $T_{III^{(q)}}$ zusammensetzen in der Form:

$$\overline{T} = \overline{S}'\, T_{III^{(q)}}\, \overline{S}''.$$

Aus der die Transformation $\overline{T}$ definirenden Gleichung folgt aber unmittelbar:

$$T = K'\, \overline{T}\, K''$$

und hieraus weiter, indem man $\overline{T}$ durch $\overline{S}'\, T_{III^{(q)}}\, \overline{S}''$ ersetzt und die beiden singulären Transformationen $K'\,\overline{S}'$ zu einer einzigen S', die beiden singulären Transformationen $\overline{S}''K''$ zu einer einzigen S'' vereinigt, schliesslich die Gleichung:

$$T = S'\, T_{III^{(q)}}\, S''.$$

Damit ist aber bewiesen, dass die Transformation T, bei der die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_{\beta}^{(m,n)}$ der Determinante $\varDelta_{\beta}$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, während alle Unterdeterminanten höheren Grades verschwinden, sich aus zwei singulären Transformationen S', S'' und der Transformation $T_{III^{(q)}}$ der Gleichung $T = S'\, T_{III^{(q)}}\, S''$ gemäss zusammensetzen lässt, und sie kann daher auch, da jede der beiden Transformationen S', S'' als singuläre Transformationen sich nach dem in Art. 2 Gezeigten aus elementaren Transformationen vom Typus T_I, T_{II} zusammensetzen lässt, $T_{III^{(q)}}$ aber selbst eine elementare Transformation ist, ohne Mühe aus elementaren Transformationen zusammengesetzt werden.

Überblickt man zum Schlusse noch die in diesem Abschnitte gewonnenen Resultate, so lassen sich dieselben zu folgendem Gesammtresultate zusammmenfassen:

Sieht man von dem Falle ab, in welchem die lineare Transformation T eine singuläre ist, und in welchem zu ihrer Zusammensetzung aus elementaren Transformationen nur Transformationen vom Typus T_I, T_{II} verwendet zu werden brauchen, so erfordert die Zusammensetzung einer linearen Transformation T aus elementaren ausser Transformationen vom Typus T_I, T_{II} immer die einmalige Anwendung einer Transformation vom Typus T_{III}.

Die sämmtlichen linearen Transformationen T zerfallen in $p+1$ streuge geschiedene Klassen, welche den Typen:

$$S,\quad S'\, T_{III^{(1)}}\, S'',\quad S'\, T_{III^{(2)}}\, S'',\quad \ldots,\quad S'\, T_{III^{(p)}}\, S'',$$

wobei S, S', S'' singuläre Transformationen bezeichnen, entsprechen; in dem Sinne, dass eine Transformation S sich niemals auch in der Form $S'\, T_{III^{(q)}}\, S''$ darstellen lässt, und eine Transformation $S'\, T_{III^{(q)}}\, S''$ weder sich auf eine Transformation S reduciren, noch sich auch in der Form $S'\, T_{III^{(q')}}\, S''$, wobei $q' \gtrless q$ ist, darstellen lässt.

Sechster Abschnitt.

Aufstellung der zu der allgemeinen linearen Transformation gehörigen Thetaformel.

1.

Nachdem im vorigen Abschnitte nachgewiesen worden ist, dass sich jede lineare Transformation T aus elementaren linearen Transformationen, T_I, T_{II}, T_{III}, und daher, mit Rücksicht auf Art. 5 des ersten Abschnitts, auch jede zu einer linearen Transformation gehörige Thetaformel aus den im zweiten, dritten und vierten Abschnitte aufgestellten, den elementaren Transformationen entsprechenden Thetaformeln zusammensetzen lässt, soll jetzt der Aufbau der zur allgemeinen linearen Transformation:

$$T = \left| \begin{array}{c|c} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & \frac{\beta_{\mu\nu}}{r} \\ \hline \frac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \frac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{array} \right|.$$

gehörigen Thetaformel in Angriff genommen werden. Auf Grund der im vorigen Abschnitte erhaltenen Resultate hat man dabei in Bezug auf die Transformation T die folgenden vier Fälle zu unterscheiden:

Fall I: Die Zahlen β seien sämmtlich der Null gleich;

Fall II: Die Zahlen β seien nicht sämmtlich der Null gleich, und es besitze ihre Determinante Δ_β einen von Null verschiedenen Werth;

Fall III: Die Zahlen β seien nicht sämmtlich der Null gleich, und es besitze die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_\beta = \Sigma \pm \beta_{11} \beta_{22} \ldots \beta_{qq}$ der Determinante Δ_β einen von Null verschiedenen Werth, während alle Unterdeterminanten $q+1^{\text{ten}}$ Grades von Δ_β verschwinden;

Fall IV: Die Zahlen β seien nicht sämmtlich der Null gleich, und es besitze die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_\beta^{(m,n)} = \Sigma \pm \beta_{m_1 n_1} \beta_{m_2 n_2} \ldots \beta_{m_q n_q}$ der Determinante Δ_β einen von Null verschiedenen Werth, während alle Unterdeterminanten $q+1^{\text{ten}}$ Grades von Δ_β verschwinden.

2.

Der zweite der soeben aufgestellten vier Fälle soll zuerst behandelt werden. In diesem Falle wird die Zusammensetzung der vorliegenden Transformation T aus elementaren durch die am Ende des Art. 4 des vorigen Abschnitts aufgestellte Gleichung geliefert, und um die zu der Transformation T gehörige Thetaformel zu erhalten, hat man die sechs Thetaformeln, welche den sechs auf der rechten Seite der erwähnten Gleichung stehenden elementaren Transformationen entsprechen, aufzustellen und dieselben alsdann nach der in Art. 5 des ersten Abschnitts gegebenen Vorschrift zusammenzusetzen.

Es entspricht nun zunächst der durch die Charakteristik:

$$\left|\begin{array}{c|c} \dfrac{\beta'_{\mu\nu}}{\Delta_\beta} & 0 \\ \hline 0 & \beta_{\mu\nu} \end{array}\right|$$

bestimmten elementaren Transformation die aus der Formel (I_1) des zweiten Abschnittes für $d_{\mu\nu} = \beta_{\mu\nu}$ unmittelbar hervorgehende Thetaformel:

$$(1)\qquad \overline{\Delta}_\beta^{\,p-1}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\overline{\Delta}_\beta-1} \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\bar{\bar{g}}+\bar{\bar{\varrho}}}{\Delta_\beta} \\ \bar{h} \end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)_{b^{(1)}},$$

wobei:

$$\bar{\bar{g}}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \beta'_{\nu\mu}\, g_\mu, \qquad \bar{\bar{\varrho}}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \beta'_{\nu\mu}\, \varrho_\mu, \qquad \bar{h}_\nu = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \beta_{\nu\mu}\, h_\mu,$$

$$v_\nu^{(1)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \beta_{\nu\mu}\, u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'}^{(1)} = \sum_{\mu=1}^{\mu=p}\sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} \beta_{\nu\mu}\,\beta_{\nu'\mu'}\,a_{\mu\mu'}. \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

Der durch die Charakteristik:

$$\left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline \sum\limits_\varepsilon \alpha_{\mu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon} & \begin{matrix} 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \end{array}\right|$$

bestimmten elementaren Transformation entspricht ferner die aus der Formel (II) des dritten Abschnitts für $e_{\mu\nu} = \sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \alpha_{\mu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}$ bei passender Wahl der Bezeichnung hervorgehende Thetaformel:

$$(2)\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g^{(1)} \\ h^{(1)} \end{bmatrix}(\!(v^{(1)})\!)_{b^{(1)}} = \vartheta\begin{bmatrix} g^{(2)} \\ h^{(2)} \end{bmatrix}(\!(v^{(2)})\!)_{b^{(2)}}\, e^{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p}\sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu'\varepsilon}\, g_\nu^{(1)} g_{\nu'}^{(1)}\pi i - \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\, g_\nu^{(1)}\pi i},$$

wobei:

$$g_\nu^{(2)} = g_\nu^{(1)}, \qquad h_\nu^{(2)} = h_\nu^{(1)} + \tfrac{1}{2}\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon} - \sum_{\nu'=1}^{\nu'=p}\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu'\varepsilon} g_{\nu'}^{(1)},$$

$$v_\nu^{(2)} = v_\nu^{(1)}, \qquad b_{\nu\nu'}^{(2)} = b_{\nu\nu'}^{(1)} + \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu'\varepsilon}\pi i. \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

Der durch die Charakteristik:

$$\left|\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & -1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right|$$

bestimmten elementaren Transformation entspricht weiter die aus der Formel $(\mathrm{III}^{(p)})$ des vierten Abschnitts bei passender Wahl der Bezeichnung hervorgehende Thetaformel:

(3)
$$\vartheta\begin{bmatrix} g^{(2)} \\ h^{(2)} \end{bmatrix}(\!(v^{(2)})\!)_{b^{(2)}} = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^p}{\Delta_{b^{(2)}}}}\; \vartheta\begin{bmatrix} g^{(3)} \\ h^{(3)} \end{bmatrix}(\!(v^{(3)})\!)_{b^{(3)}}\, e^{-U} e^{2\sum_{\nu=1}^{\nu=p} g_\nu^{(2)} h_\nu^{(2)} \pi i},$$

wobei:

$$g_\nu^{(3)} = -h_\nu^{(2)}, \qquad h_\nu^{(3)} = g_\nu^{(2)},$$

$$v_\nu^{(3)} = \frac{\pi i}{\Delta_{b^{(2)}}} \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=p} \bar{b}_{\varkappa\nu}^{(2)} v_\varkappa^{(2)}, \qquad b_{\nu\nu'}^{(3)} = \frac{\pi^2}{\Delta_{b^{(2)}}}\, \bar{b}_{\nu\nu'}^{(2)}, \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

$$U = \frac{1}{\Delta_{b^{(2)}}} \sum_{\nu=1}^{\nu=p}\sum_{\nu'=1}^{\nu'=p} \bar{b}_{\nu\nu'}^{(2)} v_\nu^{(2)} v_{\nu'}^{(2)}$$

ist, während $\Delta_{b^{(2)}}$ den Werth der aus den Parametern $b_{\mu\mu'}^{(2)}$ der auf der linken Seite stehenden Thetafunction gebildeten Determinante $\Sigma \pm b_{11}^{(2)} b_{22}^{(2)} \ldots b_{pp}^{(2)}$, $\bar{b}_{\mu\mu'}^{(2)}$ $(\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$ aber die Adjuncte von $b_{\mu\mu'}^{(2)}$ in dieser Determinante bezeichnet, und die auf der rechten Seite stehende Wurzel so auszuziehen ist, dass ihr reeller Theil positiv wird.

Der durch die Charakteristik:

$$\left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \frac{1}{rs\Delta_\beta} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & \frac{1}{rs\Delta_\beta} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} rs\Delta_\beta & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & rs\Delta_\beta \end{matrix} \end{array}\right|$$

bestimmten elementaren Transformation entspricht weiter die aus der Formel (I_3) des zweiten Abschnitts für $q = rs\varDelta_\beta$ bei passender Wahl der Bezeichnung hervorgehende Thetaformel:

$$(4)\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g^{(3)} \\ h^{(3)} \end{bmatrix}(\!(v^{(3)})\!)_{b^{(3)}} = \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_p}^{0,1,\ldots,rs\varDelta_\beta-1} \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{g^{(3)}+\sigma}{rs\varDelta_\beta} \\ rs\varDelta_\beta h^{(3)} \end{bmatrix}(\!(v^{(4)})\!)_{b^{(4)}},$$

wobei:

$$v_\nu^{(4)} = rs\varDelta_\beta v_\nu^{(3)}, \qquad b_{\nu\nu'}^{(4)} = (rs\varDelta_\beta)^2 b_{\nu\nu'}^{(3)}. \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

Der durch die Charakteristik:

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & . & . & 0 & & & & \\ . & . & . & . & & 0 & & \\ 0 & . & . & 1 & & & & \\ \hline & & & & 1 & . & . & 0 \\ & rs\varDelta_\beta \sum\limits_\varepsilon \delta_{\mu\varepsilon}\beta'_{\nu\varepsilon} & & & . & . & . & . \\ & & & & 0 & . & . & 1 \end{array}\right|$$

bestimmten elementaren Transformation entspricht weiter die aus der Formel (II) des dritten Abschnitts für $e_{\mu\nu} = rs\varDelta_\beta \sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \delta_{\mu\varepsilon}\beta'_{\nu\varepsilon}$ bei passender Wahl der Bezeichnung hervorgehende Thetaformel:

$$(5)\qquad \vartheta\begin{bmatrix} g^{(4)} \\ h^{(4)} \end{bmatrix}(\!(v^{(4)})\!)_{b^{(4)}} = \vartheta\begin{bmatrix} g^{(5)} \\ h^{(5)} \end{bmatrix}(\!(v^{(5)})\!)_{b^{(5)}}\, e^{rs\varDelta_\beta \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\nu'=1}^{\nu'=p}\sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu'\varepsilon} g_\nu^{(4)} g_{\nu'}^{(4)}\pi i - rs\varDelta_\beta \sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p}\sum\limits_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu\varepsilon} g_\nu^{(4)}\pi i};$$

wobei:

$$g_\nu^{(5)} = g_\nu^{(4)}, \qquad h_\nu^{(5)} = h_\nu^{(4)} + \tfrac{1}{2} rs\varDelta_\beta \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu\varepsilon} - rs\varDelta_\beta \sum_{\nu'=1}^{\nu'=p}\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu'\varepsilon} g_{\nu'}^{(4)},$$

$$(\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

$$v_\nu^{(5)} = v_\nu^{(4)}, \qquad b_{\nu\nu'}^{(5)} = b_{\nu\nu'}^{(4)} + rs\varDelta_\beta \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} \delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu'\varepsilon}\pi i.$$

Endlich entspricht der durch die Charakteristik:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} s\varDelta_\beta & \ldots & 0 & & & \\ . & . & . & & 0 & \\ 0 & \ldots & s\varDelta_\beta & & & \\ \hline & & & \dfrac{1}{s\varDelta_\beta} & \cdots & 0 \\ & 0 & & . & . & . \\ & & & 0 & \cdots & \dfrac{1}{s\varDelta_\beta} \end{array}\right|$$

bestimmten elementaren Transformation die aus der Formel $(\bar{\mathrm{I}}_3)$ des zweiten Abschnitts für $q = s\varDelta_\beta$ bei passender Wahl der Bezeichnung hervorgehende Thetaformel:

$$(6) \qquad (s\bar{\varDelta}_\beta)^p \,\vartheta\begin{bmatrix} g^{(5)} \\ h^{(5)} \end{bmatrix}(\!(v^{(5)})\!)_{b^{(5)}} = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0, 1, \ldots, s\bar{\varDelta}_\beta - 1} \vartheta\begin{bmatrix} s\varDelta_\beta g^{(5)} \\ \dfrac{h^{(5)} + \varrho}{s\varDelta_\beta} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b \, e^{-2\sum\limits_{\nu=1}^{\nu=p} g_\nu^{(5)} \varrho_\nu \pi i},$$

wobei:

$$v_\nu = \frac{1}{s\varDelta_\beta} v_\nu^{(5)}, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{1}{(s\varDelta_\beta)^2} b_{\nu\nu'}^{(5)}. \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

Man setze nun zunächst die Formeln (1), (2), (3), (4) zusammen. Zu dem Ende hat man die in der Gleichung (2) auf der linken Seite vorkommenden Grössen $v^{(1)}$, $b^{(1)}$ als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Gleichung (1) vorkommenden Grössen $v^{(1)}$, $b^{(1)}$ anzusehen und zugleich für jedes ν von 1 bis p: $g_\nu^{(1)} = \frac{1}{\varDelta_\beta}(\bar{\bar{g}}_\nu + \bar{\bar{\varrho}}_\nu)$, $h_\nu^{(1)} = \bar{h}_\nu$ zu setzen; die auf der linken Seite der Gleichung (3) vorkommenden Grössen $v^{(2)}$, $b^{(2)}$, $g^{(2)}$, $h^{(2)}$ als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Gleichung (2) vorkommenden Grössen $v^{(2)}$, $b^{(2)}$, $g^{(2)}$, $h^{(2)}$, und ebenso die auf der linken Seite der Gleichung (4) vorkommenden Grössen $v^{(3)}$, $b^{(3)}$, $g^{(3)}$, $h^{(3)}$ als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Gleichung (3) vorkommenden Grössen $v^{(3)}$, $b^{(3)}$, $g^{(3)}$, $h^{(3)}$ zu betrachten, sodass alsdann allgemein d. h. für $\varkappa = 2, 3, 4$ die auf der linken Seite der $\varkappa^{\text{ten}}$ Gleichung stehende Thetafunction mit der auf der rechten Seite der $\varkappa - 1^{\text{ten}}$ Gleichung, entweder allein, wie bei den Gleichungen (2), (3), oder als allgemeines Glied einer Summe, wie bei der Gleichung (1), vorkommenden Thetafunction identisch ist. Nachdem dies geschehen, ersetze man in der Gleichung (1) die auf der rechten Seite hinter dem Summenzeichen stehende Thetafunction durch den aus der Gleichung (2) dafür sich ergebenden Ausdruck, nachdem man zuvor in dieser letzten Gleichung die auf der rechten Seite vorkommende Function $\vartheta\begin{bmatrix} g^{(2)} \\ h^{(2)} \end{bmatrix}(\!(v^{(2)})\!)_{b^{(2)}}$ mit Hülfe der Gleichung (3) durch die Function $\vartheta\begin{bmatrix} g^{(3)} \\ h^{(3)} \end{bmatrix}(\!(v^{(3)})\!)_{b^{(3)}}$ und diese letztere mit Hülfe der Gleichung (4) durch Thetafunctionen mit den Argumenten $v^{(4)}$ und den Parametern $b^{(4)}$ ausgedrückt hat. Man erhält dann nach einigen leicht ersichtlichen Umformungen die zu der Transformation:

$$T^{(1,2,3,4)} = \left|\begin{array}{c|c} \dfrac{\alpha_{\mu\nu}}{rs\varDelta_\beta} & \dfrac{\beta_{\mu\nu}}{rs\varDelta_\beta} \\ \hline -rs\beta'_{\mu\nu} & 0 \end{array}\right|$$

gehörige Thetaformel in der Gestalt:

$$(F_1)\qquad \begin{aligned}\bar{\Delta}_\beta^{p-1}\,\vartheta\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(\!(u)\!)_a &= \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^p}{r^p\Delta_\beta\Delta_A}}\;e^{-\Phi}\,e^{-\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_\nu\frac{\alpha_{\nu\mu}\beta'_{\nu\mu'}}{\Delta_\beta}g_\mu g_{\mu'}\pi i+2\sum\limits_\mu g_\mu h_\mu\pi i}\\ &\times\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_p}^{0,1,\ldots,rs\bar{\Delta}_\beta-1}G[\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_p]\,\vartheta\begin{bmatrix}\dfrac{\hat{g}+\sigma}{rs\Delta_\beta}\\ rs\bar{\bar{g}}\end{bmatrix}(\!(v^{(4)})\!)_{b^{(4)}},\end{aligned}$$

wobei:

$$\bar{\bar{g}}_\nu=\sum_\mu\beta'_{\nu\mu}g_\mu,\qquad \hat{g}_\nu=\tfrac{1}{2}\sum_\mu\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}+\sum_\mu(\alpha_{\nu\mu}g_\mu-\beta_{\nu\mu}h_\mu),$$

$$v_\nu^{(4)}=s\Delta_\beta\frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_\mu A'_{\mu\nu}u_\mu,\qquad b_{\nu\nu'}^{(4)}=\frac{rs^2\Delta_\beta\pi^2}{\Delta_A}\sum_\mu\beta'_{\nu'\mu}A'_{\mu\nu},\qquad (\nu,\nu'=1,2,\ldots,p)$$

$$\Phi=\frac{1}{r\Delta_A}\sum_\mu\sum_{\mu'}\sum_\nu\beta_{\nu\mu}A'_{\mu'\nu}u_\mu u_{\mu'},$$

$$G[\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_p]=\sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\bar{\Delta}_\beta-1}e^{-\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_\nu\frac{\alpha_{\nu\mu}\beta'_{\nu\mu'}}{\Delta_\beta}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i+2\sum\limits_\mu\sum\limits_\nu\frac{\beta'_{\nu\mu}}{\Delta_\beta}\left(\sigma_\nu+\frac{1}{2}\sum\limits_\varepsilon\alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right)\varrho_\mu\pi i}$$

ist, während in Übereinstimmung mit der in Art. 1 des ersten Abschnitts gewählten Bezeichnung:

$$\frac{1}{r}\left(\alpha_{\nu\mu}\pi i+\sum_{\mu'}\beta_{\nu\mu'}a_{\mu\mu'}\right)=A_{\mu\nu}\qquad(\mu,\nu=1,2,\ldots,p)$$

gesetzt und mit Δ_A die stets von Null verschiedene Determinante $\Sigma\pm A_{11}\,A_{22}\ldots A_{pp}$, mit $A'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $A_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet ist.

3.

Die soeben eingeführte, von den ganzen Zahlen $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_p$ abhängige Summe $G[\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_p]$, für die im Folgenden auch das kürzere Zeichen $G[\sigma]$ angewandt wird, ist im Allgemeinen nicht für jedes Werthesystem $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_p$ von Null verschieden. Es ergibt sich nämlich, dass diejenigen Systeme ganzer Zahlen $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_p$, für welche $G[\sigma]$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, identisch sind mit jenen Systemen ganzer Zahlen $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_p$, welche den Gleichungen:

$$(E)\qquad \left\{\begin{aligned}&e^{-\sum\limits_\mu\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_\nu\frac{\alpha_{\nu\mu}\beta'_{\nu\mu'}}{\Delta_\beta}\bar{\varrho}_\mu^{(i)}\bar{\varrho}_{\mu'}^{(i)}\pi i+2\sum\limits_\mu\sum\limits_\nu\frac{\beta'_{\nu\mu}}{\Delta_\beta}\left(\sigma_\nu+\frac{1}{2}\sum\limits_\varepsilon\alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right)\bar{\varrho}_\mu^{(i)}\pi i}=1,\\ &\qquad\qquad i=1,2,\ldots,m,\end{aligned}\right.$$

in denen $\bar{\varrho}_1^{(i)},\bar{\varrho}_2^{(i)},\ldots,\bar{\varrho}_p^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ die sämmtlichen Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(C)\qquad \sum_{\mu'}\sum_{\nu} \alpha_{\nu 1}\beta'_{\nu\mu'}\bar{\varrho}_{\mu'} \equiv 0 \ (\text{mod.}\ \varDelta_\beta),\ \ldots,\ \sum_{\mu'}\sum_{\nu} \alpha_{\nu p}\beta'_{\nu\mu'}\bar{\varrho}_{\mu'} \equiv 0 \ (\text{mod.}\ \varDelta_\beta)$$

bezeichnen, genügen, und weiter, dass diese Zahlensysteme sämmtlich durch das Gleichungensystem:

$$\sigma_\nu = \mathring{\sigma}_\nu + \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu - \beta_{\nu\mu}\lambda_\mu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

geliefert werden, wenn man darin unter $\mathring{\sigma}_1, \mathring{\sigma}_2, \ldots, \mathring{\sigma}_p$ irgend eine Lösung der Gleichungen (E) versteht, für die $\varkappa$, λ aber der Reihe nach alle möglichen Systeme von je $2p$ ganzen Zahlen setzt. Auch ergibt sich die Gleichung:

$$G[\mathring{\sigma}_1 + \sum_\mu (\alpha_{1\mu}\varkappa_\mu - \beta_{1\mu}\lambda_\mu) \ldots \mathring{\sigma}_p + \sum_\mu (\alpha_{p\mu}\varkappa_\mu - \beta_{p\mu}\lambda_\mu)]$$

$$= e^{\sum\limits_\mu \sum\limits_{\mu'} \sum\limits_\nu \frac{\alpha_{\nu\mu}\beta'_{\nu\mu'}}{\varDelta_\beta} \varkappa_\mu \varkappa_{\mu'} \pi i + 2 \sum\limits_\mu \sum\limits_\nu \frac{\beta'_{\nu\mu}}{\varDelta_\beta}\left(\mathring{\sigma}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\varepsilon \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right)\varkappa_\mu \pi i} \, G[\mathring{\sigma}_1 \ldots \mathring{\sigma}_p].$$

Unter Benutzung dieses Resultates kann man die am Schlusse des Art. 2 aufgestellte Thetaformel, wenn man für $\nu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\sum_\mu (\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu - \beta_{\nu\mu}\lambda_\mu) = \eta_\nu$$

setzt und mit n die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$\eta_1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ rs\varDelta_\beta),\quad \eta_2 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ rs\varDelta_\beta),\ \ldots,\ \eta_p \equiv 0 \ (\text{mod.}\ rs\varDelta_\beta)$$

bezeichnet, in die reducirte Gestalt:

$$n\bar{\varDelta}_\beta^{p-1}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^p}{i^p \varDelta_\beta \varDelta_A}}\; e^{-\Phi}\, e^{-\sum\limits_\mu \sum\limits_{\mu'} \sum\limits_\nu \frac{\alpha_{\nu\mu}\beta'_{\nu\mu'}}{\varDelta_\beta} g_\mu g_{\mu'} \pi i + 2\sum\limits_\mu g_\mu h_\mu \pi i}\, G[\mathring{\sigma}]$$

(F_2)

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs\bar{\varDelta}_\beta - 1} e^{\sum\limits_\mu \sum\limits_{\mu'} \sum\limits_\nu \frac{\alpha_{\nu\mu}\beta'_{\nu\mu'}}{\varDelta_\beta} \varkappa_\mu \varkappa_{\mu'} \pi i + 2\sum\limits_\mu \sum\limits_\nu \frac{\beta'_{\nu\mu}}{\varDelta_\beta}\left(\mathring{\sigma}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\varepsilon \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right)\varkappa_\mu \pi i}\, \vartheta\begin{bmatrix} \frac{\hat{g} + \mathring{\sigma} + \eta}{rs\varDelta_\beta} \\ rs\bar{\bar{g}} \end{bmatrix}(\!(v^{(4)})\!)_{b^{(4)}}$$

bringen.

4.

Aus der gewonnenen, der Transformation $T^{(1,2,3,4)}$ entsprechenden Thetaformel und den beiden noch übrigen in Art. 2 aufgestellten elementaren Thetaformeln (5), (6) soll jetzt durch passende Verbindung die der vorgelegten linearen Transformation T entsprechende Thetaformel gebildet werden. Zu dem Ende setze man in der Formel (5):

$$g_\nu^{(4)} = \frac{1}{rs\varDelta_\beta}(\hat{g}_\nu + \mathring{\sigma}_\nu + \eta_\nu), \qquad h_\nu^{(4)} = rs\bar{\bar{g}}_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

betrachte die in dieser Formel vorkommenden Grössen $\mathfrak{v}^{(4)}$, $\mathfrak{b}^{(4)}$ als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Formel (F_2) stehenden Grössen $\mathfrak{v}^{(4)}$, $\mathfrak{b}^{(4)}$ und weiter die in der Formel (6) vorkommenden Grössen $g^{(5)}$, $h^{(5)}$, $\mathfrak{v}^{(5)}$, $\mathfrak{b}^{(5)}$ als nicht verschieden von den auf der rechten Seite der Formel (5) stehenden, durch die soeben gemachten Festsetzungen mitbestimmten Grössen $g^{(5)}$, $h^{(5)}$, $\mathfrak{v}^{(5)}$, $\mathfrak{b}^{(5)}$. Es wird dann die auf der linken Seite der Formel (5) stehende Thetafunction mit der im allgemeinen Gliede der auf der rechten Seite der Formel (F_2) stehenden Summe vorkommenden identisch, ebenso wird die auf der linken Seite der Formel (6) stehende Thetafunction mit der auf der rechten Seite der Formel (5) stehenden identisch, und man erhält, indem man in der Formel (F_2), nach vorhergegangener Multiplication derselben mit $(s\bar{\varDelta}_\beta)^p$, die auf der rechten Seite hinter dem Summenzeichen stehende Thetafunction durch den aus der Gleichung (5) dafür sich ergebenden Ausdruck ersetzt, nachdem man zuvor in dieser letzten Gleichung an Stelle der auf ihrer rechten Seite stehenden Thetafunction den aus der Gleichung (6) dafür sich ergebenden Ausdruck eingeführt hat, die zu der vorgelegten linearen Transformation T gehörige Thetaformel nach ziemlich weitläufigen Umformungen in der vorläufigen Gestalt:

$$(F_3)\qquad n s^p \varDelta_\beta^{2p-1}\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^p}{r^p \varDelta_\beta \varDelta_A}}\; e^{-\Phi}\, e^{\psi(g,h)}\, e^{\varphi(\mathring{\sigma})}\, G[\mathring{\sigma}]$$

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs\bar{\varDelta}_\beta-1}\; \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_\varrho}^{0,1,\ldots,s\bar{\varDelta}_\beta-1} e^{-\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu \eta'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu \lambda_\mu \pi i - \frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \sum\limits_\mu (\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu - \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta'_\nu)\pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \hat{g}_\nu \eta'_\nu \pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{rs\varDelta_\beta}\sum\limits_\nu (\hat{g}_\nu + \mathring{\sigma}_\nu + \eta_\nu)(\varrho_\nu + \bar{\varrho}_\nu)\pi i}\; \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g} + \mathring{\sigma} + \eta}{r} \\[2mm] \dfrac{\hat{h} + \eta'}{s} + \dfrac{\varrho + \bar{\varrho}}{s\varDelta_\beta} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b,$$

wobei:

$$\psi(g,h) = \frac{1}{rs}\sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu (\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu'} g_\mu g_{\mu'} - 2\gamma_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu'} g_\mu h_{\mu'} + \beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu'} h_\mu h_{\mu'})\pi i - \frac{1}{rs}\sum_\nu \sum_\mu \sum_{\mu'} \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}(\alpha_{\nu\mu'} g_{\mu'} - \beta_{\nu\mu'} h_{\mu'})\pi i,$$

$$\varphi(\mathring{\sigma}) = -\sum_\nu \sum_{\nu'} \sum_\varepsilon \frac{\delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu'\varepsilon}}{rs\varDelta_\beta}\Big(\mathring{\sigma}_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\Big)\Big(\mathring{\sigma}_{\nu'} + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu'} \alpha_{\nu'\mu'}\beta_{\nu'\mu'}\Big)\pi i - \frac{1}{rs}\sum_\nu \sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\Big(\mathring{\sigma}_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu'} \alpha_{\nu\mu'}\beta_{\nu\mu'}\Big)\pi i,$$

$$v_\nu = \frac{\pi i}{\varDelta_A}\sum_\mu A'_{\mu\nu} u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{\pi i}{\varDelta_A}\sum_\mu A'_{\mu\nu} B_{\mu\nu'},$$

$$\eta_\nu = \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu - \beta_{\nu\mu}\lambda_\mu), \qquad \eta'_\nu = \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu + \delta_{\nu\mu}\lambda_\mu), \qquad {\scriptstyle (\nu,\nu'=1,2,\ldots,p)}$$

$$\hat{g}_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu} + \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu} g_\mu - \beta_{\nu\mu} h_\mu), \qquad \hat{h}_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu} + \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu} g_\mu + \delta_{\nu\mu} h_\mu),$$

$$\bar{\varrho}_\nu = \tfrac{1}{2} rs\varDelta_\beta \sum_\varepsilon \delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu\varepsilon} - \sum_{\nu'} \sum_\varepsilon \delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu'\varepsilon}\Big(\mathring{\sigma}_{\nu'} + \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu'\mu}\beta_{\nu'\mu}\Big) - rs\sum_\mu \beta'_{\nu\mu}\varkappa_\mu - \tfrac{1}{2}\varDelta_\beta \sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}$$

ist.

Die auf der rechten Seite der Formel (F_3) stehende Summe erleidet nur eine Umstellung ihrer Summanden und folglich keine Änderung ihres Werthes, wenn man im allgemeinen Gliede derselben die Grössen $\varkappa$, λ, ϱ um irgend welche ganze Zahlen ändert. Auf Grund dieser Eigenschaft kann der letzten Formel eine einfachere Gestalt gegeben werden.

Zu dem Ende ersetze man zunächst, indem man beachtet, dass die Grössen $\bar{\varrho}$, wie unschwer zu zeigen ist, ganzzahlige Werthe besitzen, für jedes ν von 1 bis p ϱ^ν durch $\varrho_\nu - \bar{\varrho}_\nu$.

Um sodann weitere Vereinfachungen der Formel vorzubereiten, bezeichne man mit $\bar{\varkappa}_\mu$, $\bar{\lambda}_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, p)$ $2p$ ganze Zahlen, welche den p Congruenzen:

$$\bar{\eta}_1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ r), \quad \bar{\eta}_2 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ r), \quad \ldots, \quad \bar{\eta}_p \equiv 0 \ (\text{mod.}\ r)$$

genügen, und ersetze für jedes μ von 1 bis p $\varkappa_\mu$ durch $\varkappa_\mu + \bar{\varkappa}_\mu$, λ_μ durch $\lambda_\mu + \bar{\lambda}_\mu$ und gleichzeitig für jedes ν von 1 bis p ϱ_ν durch $\varrho_\nu - \Delta_\beta \bar{\eta}'_\nu$; dabei sind zur Abkürzung mit $\bar{\eta}_\nu$, $\bar{\eta}'_\nu$ die Ausdrücke:

$$\bar{\eta}_\nu = \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu}\bar{\varkappa}_\mu - \beta_{\nu\mu}\bar{\lambda}_\mu), \qquad \bar{\eta}'_\nu = \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu}\bar{\varkappa}_\mu + \delta_{\nu\mu}\bar{\lambda}_\mu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

bezeichnet. Die dadurch entstehende neue Summe unterscheidet sich dann nach dem vorher Bemerkten von der ursprünglichen nur durch die Anordnung der Glieder; setzt man daher für das System der $2p$ ganzen Zahlen $\bar{\varkappa}_1, \ldots, \bar{\varkappa}_p, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_p$ der Reihe nach die sämmtlichen Normallösungen des Congruenzensystems:

$$s\Delta_\beta\bar{\eta}_1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ rs\Delta_\beta), \quad s\Delta_\beta\bar{\eta}_2 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ rs\Delta_\beta), \quad \ldots, \quad s\Delta_\beta\bar{\eta}_p \equiv 0 \ (\text{mod.}\ rs\Delta_\beta),$$

bezeichnet die Anzahl dieser Lösungen mit n' und addirt die n' so entstandenen Summen, so erhält man eine neue Summe, welche das n'-fache der ursprünglichen ist. Auf diese Weise geht aus der obigen Thetaformel die neue:

$$(F_4) \qquad n\,n'\,s^p\bar{\Delta}_\beta^{2p-1}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \underset{+}{\sqrt{\frac{(-\pi)^p}{r^p\Delta_\beta\Delta_A}}}\; e^{-\Phi}\, e^{\psi(g,h)}\, e^{\varphi(\mathring{\sigma})} G[\mathring{\sigma}]$$

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs\bar{\Delta}_\beta-1}\ \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,s\bar{\Delta}_\beta-1} e^{-\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu\eta'_\nu\pi i + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu\lambda_\mu\pi i - \frac{1}{rs}\sum\limits_\nu\sum\limits_\mu(\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu - \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta'_\nu)\pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \hat{g}_\nu\eta'_\nu\pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{rs\Delta_\beta}\sum\limits_\nu(\hat{g}_\nu + \mathring{\sigma}_\nu + \eta_\nu)\varrho_\nu\pi i}\; \bar{H}\begin{bmatrix} \frac{\varrho_1}{\Delta_\beta} \cdots \frac{\varrho_p}{\Delta_\beta} \end{bmatrix} \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g} + \mathring{\sigma} + \eta}{r} \\ \dfrac{\hat{h} + \eta'}{s} + \dfrac{\varrho}{s\Delta_\beta} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b$$

hervor, bei der:

$$\bar{H}\begin{bmatrix} \frac{\varrho_1}{\Delta_\beta} \cdots \frac{\varrho_p}{\Delta_\beta} \end{bmatrix} = \sum_{\substack{\bar{\varkappa}_1,\ldots,\bar{\varkappa}_p \\ \bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_p}}^{0,1,\ldots,rs\bar{\Delta}_\beta-1}{}' e^{\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \bar{\eta}_\nu\bar{\eta}'_\nu\pi i + \sum\limits_\mu \bar{\varkappa}_\mu\bar{\lambda}_\mu\pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu\left[\left(\frac{\varrho_\nu}{\Delta_\beta} + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}_\nu - \left(\mathring{\sigma}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}'_\nu\right]\pi i}$$

ist; dabei deutet der Accent am Summenzeichen an, dass zur Bildung dieser Summe an Stelle des Systems der $2p$ Grössen $\bar{\varkappa}_1, \ldots, \bar{\varkappa}_p, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_p$ von den $(rs\Delta_p)^{2p}$ Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, rs\Delta_\beta - 1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung nur diejenigen, n' an der Zahl, treten sollen, für welche die p Grössen $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \ldots, \bar{\eta}_p$ sämmtlich durch r theilbare ganze Zahlen sind.

5.

Die soeben eingeführte, von den ganzen Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ abhängige Summe $\bar{H}\left[\frac{\varrho_1}{\Delta_\beta} \cdots \frac{\varrho_p}{\Delta_\beta}\right]$, für die im Folgenden auch das kürzere Zeichen $\bar{H}\left[\frac{\varrho}{\Delta_\beta}\right]$ angewandt wird, ist im Allgemeinen nicht für alle Werthesysteme $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ von Null verschieden. Es ergibt sich nämlich zunächst, dass $\bar{H}\left[\frac{\varrho}{\Delta_\beta}\right]$ immer verschwindet, wenn die ganzen Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_p$ nicht sämmtlich durch Δ_β theilbar sind. Ist aber:

$$\varrho_1 = \Delta_\beta \tau_1, \quad \varrho_2 = \Delta_\beta \tau_2, \quad \ldots, \quad \varrho_p = \Delta_\beta \tau_p,$$

wobei $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ ganze Zahlen sind, so geht $\bar{H}\left[\frac{\varrho}{\Delta_\beta}\right]$ in $\Delta_\beta^{2p} H[\tau]$ über, wenn man mit $H[\tau]$ die Summe:

$$H[\tau] = \sum_{\substack{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs-1}{}' e^{\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu \eta'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu \lambda_\mu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \left[\left(\tau_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\eta_\nu - \left(\mathring{\delta}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\eta'_\nu\right]\pi i}$$

bezeichnet, bei der der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass an Stelle des Systems der $2p$ Grössen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ von den $(rs)^{2p}$ Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, rs - 1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung nur diejenigen treten sollen, für welche die p Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ sämmtlich durch r theilbar sind. Für diese neue Summe ergibt sich nun aber, dass diejenigen Systeme ganzer Zahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$, für welche $H[\tau]$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, identisch sind mit jenen Systemen ganzer Zahlen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$, welche den Gleichungen:

$$(\bar{E}) \quad \begin{cases} e^{\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \bar{\eta}_\nu^{(i)} \bar{\eta}_\nu'^{(i)} \pi i + \sum\limits_\mu \bar{\varkappa}_\mu^{(i)} \bar{\lambda}_\mu^{(i)} \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \left[\left(\tau_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}_\nu^{(i)} - \left(\mathring{\delta}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}_\nu'^{(i)} \pi i\right]} = 1, \\ i = 1, 2, \ldots, \bar{m}, \end{cases}$$

genügen, in denen zur Abkürzung:

$$\sum_\mu \left(\alpha_{\nu\mu}\bar{\varkappa}_\mu^{(i)} - \beta_{\nu\mu}\bar{\lambda}_\mu^{(i)}\right) = \bar{\eta}_\nu^{(i)}, \qquad \sum_\mu \left(-\gamma_{\nu\mu}\bar{\varkappa}_\mu^{(i)} + \delta_{\nu\mu}\bar{\lambda}_\mu^{(i)}\right) = \bar{\eta}_\nu'^{(i)} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \bar{m} \\ \nu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

gesetzt ist, und in denen $\bar{\varkappa}_1^{(i)}, \ldots, \bar{\varkappa}_p^{(i)}, \bar{\lambda}_1^{(i)}, \ldots, \bar{\lambda}_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \bar{m})$ diejenigen Normallösungen $\bar{\varkappa}_1, \ldots, \bar{\varkappa}_p, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_p$ des Congruenzensystems:

$$(\overline{C}) \qquad s\bar{\eta}_1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ rs), \quad s\bar{\eta}_2 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ rs), \ \ldots, \ s\bar{\eta}_p \equiv 0 \ (\text{mod.}\ rs)$$

sind, welche der weiteren Bedingung genügen, dass durch sie:

$$(\overline{C}') \qquad \sum_\nu \bar{\eta}_\nu \eta'_\nu \equiv 0 \ (\text{mod.}\ rs)$$

wird für jedes System von $2p$ ganzen Zahlen $\varkappa$, λ, für welches die p Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_p$ sämmtlich durch r theilbar sind; und weiter findet man, dass diese Zahlensysteme $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ sämmtlich durch das Gleichungensystem:

$$\tau_\nu = \mathring{\tau}_\nu + s\,\xi_\nu + \bar{\eta}'_\nu \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \ldots, p)}$$

geliefert werden, wenn man darin unter $\mathring{\tau}_1, \mathring{\tau}_2, \ldots, \mathring{\tau}_p$ irgend eine Lösung der Gleichungen $(\overline{E})$ versteht, für die ξ alle möglichen ganzen Zahlen, für die $\bar{\varkappa}, \bar{\lambda}$ aber alle diejenigen Systeme ganzer Zahlen, welche den Congruenzen:

$$\bar{\eta}_1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ r), \quad \bar{\eta}_2 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ r), \ \ldots, \ \bar{\eta}_p \equiv 0 \ (\text{mod.}\ r)$$

genügen, setzt. Auch ergibt sich die Gleichung:

$$H[\mathring{\tau}_1 + s\,\xi_1 + \bar{\eta}'_1 \ldots \mathring{\tau}_p + s\,\xi_p + \bar{\eta}'_p]$$
$$\times e^{-\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \bar{\eta}_\nu \bar{\eta}'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \bar{\varkappa}_\mu \bar{\lambda}_\mu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \left[\left(\mathring{\tau}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}_\nu - \left(\mathring{\delta}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}'_\nu\right]\pi i} \, H[\mathring{\tau}_1 \ldots \mathring{\tau}_p].$$

6.

Unter Benutzung des Resultates des letzten Artikels kann man nun endlich die zu der linearen Transformation:

$$T = \left| \begin{array}{c|c} \dfrac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & \dfrac{\beta_{\mu\nu}}{r} \\ \hline \dfrac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \dfrac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{array} \right|,$$

bei der $\Delta_\beta \gtrless 0$ ist, gehörige Thetaformel in die definitive Gestalt:

$$(\mathfrak{T}) \qquad n_1\, n_2\, (rs)^p\, \overline{\Delta}_\beta^{\,p-1}\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{(-\pi)^p\, r^{\bar{p}}}{\Delta_\beta \Delta_A}}\; e^{-\Phi}\, e^{\psi(g,h)}\, e^{\varphi(\mathring{\sigma})}\, G[\mathring{\sigma}]\, H[\mathring{\tau}]$$
$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p}}^{0, 1, \ldots, rs-1} e^{-\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu \eta'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu \lambda_\mu \pi i - \frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \sum\limits_\mu (\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu - \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta'_\nu)\pi i}$$
$$\times e^{-\frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \hat{g}_\nu \eta'_\nu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu (\hat{g}_\nu + \mathring{\sigma}_\nu + \eta_\nu)\mathring{\tau}_\nu \pi i}\; \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g} + \mathring{\sigma} + \eta}{r} \\ \dfrac{\hat{h} + \mathring{\tau} + \eta'}{s} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b.$$

bringen. In dieser Formel ist zunächst:

$$v_\nu = \frac{\pi i}{\varDelta_A} \sum_\mu A'_{\mu\nu} u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{\pi i}{\varDelta_A} \sum_\mu A'_{\mu\nu} B_{\mu\nu'}, \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

wenn man mit $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ die Ausdrücke:

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{r}\Big(\alpha_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \beta_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}\Big), \qquad B_{\mu\nu} = \frac{1}{s}\Big(\gamma_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \delta_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}\Big), \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

mit $\varDelta_A$ die Determinante $\Sigma \pm A_{11} A_{22} \ldots A_{pp}$ und mit $A'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $A_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet; es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\eta_\nu = \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu - \beta_{\nu\mu}\lambda_\mu), \qquad \eta'_\nu = \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu + \delta_{\nu\mu}\lambda_\mu),$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\hat{g}_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu} + \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu} g_\mu - \beta_{\nu\mu} h_\mu), \quad \hat{h}_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu} + \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu} g_\mu + \delta_{\nu\mu} h_\mu),$$

$$\Phi = \frac{1}{r\varDelta_A} \sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu \beta_{\nu\mu} A'_{\mu'\nu} u_\mu u_{\mu'},$$

$$\begin{aligned} \psi(g, h) = {} & \frac{1}{rs} \sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu (\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu'} g_\mu g_{\mu'} - 2\gamma_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu'} g_\mu h_{\mu'} + \beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu'} h_\mu h_{\mu'})\,\pi i \\ & - \frac{1}{rs} \sum_\nu \sum_\mu \sum_{\mu'} \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}(\alpha_{\nu\mu'} g_{\mu'} - \beta_{\nu\mu'} h_{\mu'})\,\pi i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathring{\sigma}) = {} & -\sum_\nu \sum_{\nu'} \sum_\varepsilon \frac{\delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu'\varepsilon}}{rs\varDelta_\beta} \Big(\mathring{\sigma}_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\Big)\Big(\mathring{\sigma}_{\nu'} + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu'} \alpha_{\nu'\mu'}\beta_{\nu'\mu'}\Big)\pi i \\ & - \frac{1}{rs} \sum_\nu \sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\Big(\mathring{\sigma}_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu'} \alpha_{\nu\mu'}\beta_{\nu\mu'}\Big)\pi i, \end{aligned}$$

$$G[\mathring{\sigma}] = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0, 1, \ldots, \varDelta_\beta - 1} e^{-\sum\limits_\mu \sum\limits_{\mu'} \sum\limits_\nu \frac{\alpha_{\nu\mu}\beta'_{\nu\mu'}}{\varDelta_\beta} \varrho_\mu \varrho_{\mu'} \pi i + 2 \sum\limits_\mu \sum\limits_\nu \frac{\beta'_{\nu\mu}}{\varDelta_\beta}\left(\mathring{\sigma}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\varepsilon \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right)\varrho_\mu \pi i},$$

wobei $\varDelta_\beta$ die Determinante $\Sigma \pm \beta_{11}\beta_{22} \ldots \beta_{pp}$ und $\beta'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\beta_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet, und unter $\mathring{\sigma}_1, \mathring{\sigma}_2, \ldots, \mathring{\sigma}_p$ eine beliebige Lösung des in Art. 3 aufgestellten Gleichungensystems (E) zu verstehen ist; es ist weiter:

$$H[\mathring{\tau}] = {\sum_{\substack{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p}}^{0, 1, \ldots, rs-1}}' e^{\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu \eta'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu \lambda_\mu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \left[\left(\mathring{\tau}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\eta_\nu - \left(\mathring{\sigma}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\eta'_\nu\right]\pi i},$$

wobei der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass an Stelle des Systems der $2p$ Grössen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ von den $(rs)^{2p}$ Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, rs-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung nur diejenigen treten sollen, für welche die p Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ sämmtlich durch r theilbar sind, und unter $\mathring{\tau}_1, \mathring{\tau}_2, \ldots, \mathring{\tau}_p$ irgend eine Lösung des in Art. 5 aufgestellten Gleichungensystems $(\overline{E})$ zu verstehen ist; es bezeichnen weiter:

n_1 die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$s\eta_1 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad s\eta_2 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \ldots, \quad s\eta_p \equiv 0 \pmod{rs},$$
$$r\eta_1' \equiv 0 \pmod{rs}, \quad r\eta_2' \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \ldots, \quad r\eta_p' \equiv 0 \pmod{rs},$$

n_2 die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$\eta_1 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \eta_2 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \ldots, \quad \eta_p \equiv 0 \pmod{rs};$$

es ist endlich die auf der rechten Seite stehende Wurzel so auszuziehen, dass ihr reeller Theil positiv wird.

Die Anzahlen n_1, n_2, sowie die Zahlen $\mathring{\sigma}$, $\mathring{\tau}$ hängen von den Zahlenwerthen der α, β, γ, δ ab und müssen in jedem Falle besonders bestimmt werden.

7.

Es soll jetzt der erste der in Art. 1 aufgestellten Fälle behandelt werden, der dadurch charakterisirt ist, dass bei der vorgelegten linearen Transformation alle Zahlen β den Werth Null besitzen, oder, was dasselbe, diese Transformation eine singuläre ist. Nachdem man in den vorhergehenden Artikeln diejenige Thetaformel gewonnen hat, welche der allgemeinen linearen Transformation im Falle $\varDelta_\beta \gtrless 0$ entspricht, erhält man die der vorliegenden singulären Transformation:

$$S = \left|\begin{array}{c|c} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & 0 \\ \hline \frac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \frac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{array}\right|$$

zugehörige Thetaformel auf die einfachste Weise, indem man diese Transformation der Gleichung:

$$S = T_{III}^{(p)}\dot{T}$$

gemäss, aus den beiden Transformationen:

$$T_{III}^{(p)} = \left|\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & \\ 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & \\ 0 & \cdots & -1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right| \qquad \dot{T} = \left|\begin{array}{c|c} 0 & -\frac{\alpha_{\mu\nu}}{r} \\ \hline \frac{\delta_{\mu\nu}}{s} & -\frac{\gamma_{\mu\nu}}{s} \end{array}\right|$$

und entsprechend die zu ihr gehörige Thetaformel aus den beiden zu den Transformationen $T_{III}^{(p)}$, $\dot{T}$ gehörigen Formeln in der früher angegebenen Weise zusammensetzt, indem man beachtet, dass die zu der fundamentalen Transformation $T_{III}^{(p)}$ gehörige Thetaformel schon im vierten Abschnitte aufgestellt wurde, die der Transformation $\dot{T}$ entsprechende Thetaformel aber, da bei ihr die Determinante $\varDelta_{\dot{\beta}} = \Sigma \pm \dot{\beta}_{11}\,\dot{\beta}_{22} \ldots \dot{\beta}_{pp} = (-1)^p\,\Sigma \pm \alpha_{11}\,\alpha_{22} \ldots \alpha_{pp}$ einen von Null verschiedenen

Werth besitzt, aus der im vorigen Artikel aufgestellten Hauptformel durch passende Verfügung über die dort vorkommenden Zahlen α, β, γ, δ ohne Mühe abgeleitet werden kann. Auf diese Weise erhält man, nach Durchführung der möglichen Vereinfachungen, die der vorgelegten singulären Transformation S entsprechende Thetaformel in der Gestalt:

$$(\mathfrak{S})\qquad n s^p \Delta_\alpha\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = e^{\psi(g,h)} H'[\mathring{\tau}]$$

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs-1} e^{-\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu \eta'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu \lambda_\mu \pi i - \frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \sum\limits_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \hat{g}_\nu \eta'_\nu \pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{rs}\sum\limits_\nu (\hat{g}_\nu + \eta_\nu)\mathring{\tau}_\nu \pi i}\; \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g}+\eta}{r} \\ \dfrac{\hat{h}+\mathring{\tau}+\eta'}{s} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b .$$

In dieser Formel ist zunächst:

$$v_\nu = \frac{1}{s}\sum_\mu \delta_{\nu\mu} u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{1}{s^2}\sum_\mu \delta_{\nu\mu}\Big(\gamma_{\nu'\mu}\pi i + \sum_{\mu'} \delta_{\nu'\mu'} a_{\mu\mu'}\Big); \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\eta_\nu = \sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu, \qquad \eta'_\nu = \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu + \delta_{\nu\mu}\lambda_\mu),$$

$$\hat{g}_\nu = \sum_\mu \alpha_{\nu\mu} g_\mu, \qquad \hat{h}_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu} + \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu} g_\mu + \delta_{\nu\mu} h_\mu), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\psi(g,h) = \frac{1}{rs}\sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu \alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu'} g_\mu g_{\mu'} \pi i - \frac{1}{rs}\sum_\nu \sum_\mu \sum_{\mu'} \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\alpha_{\nu\mu'} g_{\mu'} \pi i;$$

es ist weiter:

$$H'[\mathring{\tau}] = \sum_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p}^{0,1,\ldots,rs-1}{}' e^{\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu \eta^{\backprime}_\nu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \left(\mathring{\tau}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\eta_\nu \pi i},$$

wobei der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass an Stelle des Systems der p Grössen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$ von den $(rs)^p$ Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, rs-1$ zur p^{ten} Classe mit Wiederholung nur diejenigen treten sollen, für welche die p Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ sämmtlich durch r theilbar sind, wobei ferner zur Abkürzung:

$$\eta^{\backprime}_\nu = -\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

gesetzt ist, und wobei endlich $\mathring{\tau}_1, \mathring{\tau}_2, \ldots, \mathring{\tau}_p$ eine beliebige Lösung des Gleichungensystems:

$$(\overline{E}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} e^{\frac{1}{rs}\sum\limits_{\nu} \bar{\eta}_{\nu}^{(i)} \bar{\eta}_{\nu}^{\prime(i)} \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_{\nu}\left(\tau_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_{\mu}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}_{\nu}^{\prime(i)}\pi i} = 1, \\ i = 1, 2, \ldots, \overline{m}, \end{array} \right.$$

bezeichnet, in dem zur Abkürzung:

$$\sum_{\mu} \alpha_{\nu\mu}\,\bar{\varkappa}_{\mu}^{(i)} = \bar{\eta}_{\nu}^{(i)}, \qquad -\sum_{\mu}\gamma_{\nu\mu}\,\bar{\varkappa}_{\mu}^{(i)} = \bar{\eta}_{\nu}^{\prime(i)} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \overline{m} \\ \nu = 1, 2, \ldots, p \end{pmatrix}$$

gesetzt ist, und in denen $\bar{\varkappa}_1^{(i)}, \ldots, \bar{\varkappa}_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \overline{m})$ diejenigen Normallösungen $\bar{\varkappa}_1, \ldots, \bar{\varkappa}_p$ des Congruenzensystems:

$$(\overline{C}) \qquad s\bar{\eta}_1 \equiv 0 \text{ (mod. } rs), \quad s\bar{\eta}_2 \equiv 0 \text{ (mod. } rs), \quad \ldots, \quad s\bar{\eta}_p \equiv 0 \text{ (mod. } rs)$$

sind, welche der weiteren Bedingung genügen, dass durch sie:

$$(\overline{C}') \qquad \sum_{\nu} \bar{\eta}_\nu\, \eta'_\nu \equiv 0 \text{ (mod. } rs)$$

wird für jedes System von p ganzen Zahlen $\varkappa$, für welches die p Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ sämmtlich durch r theilbar sind; es bezeichnet endlich Δ_α die Determinante $\Sigma \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{pp}$ und n die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$\begin{array}{llll} s\eta_1 \equiv 0 \text{ (mod. } rs), & s\eta_2 \equiv 0 \text{ (mod. } rs), & \ldots, & s\eta_p \equiv 0 \text{ (mod. } rs), \\ r\eta'_1 \equiv 0 \text{ (mod. } rs), & r\eta'_2 \equiv 0 \text{ (mod. } rs), & \ldots, & r\eta'_p \equiv 0 \text{ (mod. } rs). \end{array}$$

Diese Anzahl n, sowie die Zahlen $\mathring{\tau}$ hängen von den Zahlenwerthen der α, γ, δ ab und müssen in jedem Falle besonders bestimmt werden.

8.

Es soll jetzt der dritte der im ersten Artikel aufgestellten vier Fälle behandelt werden, der dadurch charakterisirt ist, dass bei der vorgelegten linearen Transformation T die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_\beta = \Sigma \pm \beta_{11}\beta_{22}\ldots\beta_{qq}$ der Determinante Δ_β einen von Null verschiedenen Werth besitzt, während alle Unterdeterminanten höheren Grades verschwinden. Wie am Schlusse des Art. 5 des fünften Abschnitts gezeigt ist, kann man in diesem Falle die Transformation T aus den beiden dort angeschriebenen Transformationen $\widetilde{T}_{III^{(p-q)}}$, $\dot{T}$ in der Form:

$$T = \widetilde{T}_{III^{(p-q)}}\,\dot{T}$$

zusammensetzen, und man kann daher auch die zur Transformation T gehörige Thetaformel aus den beiden, zu den Transformationen $\widetilde{T}_{III^{(p-q)}} = T_{III^{(p)}}\,T^{-1}_{III^{(q)}}$, $\dot{T}$ gehörigen Thetaformeln zusammensetzen, von denen die erste aus den Formeln des vierten Abschnitts erhalten wird, die zweite aber, da bei der Transformation $\dot{T}$ die Determinante $\Delta_{\dot{\beta}}$ von Null verschieden ist, aus der Hauptformel des Art. 6 bei passender Verfügung über die dort vorkommenden α, β, γ, δ hervorgeht. Man erhält auf diese Weise die der vorliegenden Transformation T entsprechende Thetaformel in der Gestalt:

$$(\mathfrak{T}') \qquad n_1 n_2 (rs)^p \dot{\varDelta}_{\dot\beta}^{p-1}\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{i^{p-q}(-\pi)^p r^p}{\varDelta_{\dot\beta}\varDelta_A}}\, e^{-\Phi} e^{\psi(g,h)} e^{\dot\varphi(\mathring{\sigma})} \dot{G}[\mathring{\sigma}]\, H[\mathring{\tau}]$$

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs-1} e^{-\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu \eta'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu \lambda_\mu \pi i - \frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \sum\limits_\mu (\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu - \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta'_\nu)\pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \hat{g}_\nu \eta'_\nu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu (\hat{g}_\nu + \mathring{\sigma}_\nu + \eta_\nu)\mathring{\tau}_\nu \pi i}\ \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat{g} + \mathring{\sigma} + \eta}{r} \\[2mm] \dfrac{\hat{h} + \mathring{\tau} + \eta'}{s} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b,$$

bei der v, b, η, η', $\hat{g}$, $\hat{h}$, Φ, $\psi(g, h)$, $H[\mathring{\tau}]$, n_1, n_2 dieselbe Bedeutung haben wie in Art. 6, und bei der:

$$\dot\varphi(\mathring{\sigma}) = -\sum_\nu \sum_{\nu'} \sum_\varepsilon \frac{\dot\delta_{\nu\varepsilon}\dot\beta'_{\nu'\varepsilon}}{rs\varDelta_{\dot\beta}} \Big(\mathring{\sigma}_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\Big)\Big(\mathring{\sigma}_{\nu'} + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu'} \alpha_{\nu'\mu'}\beta_{\nu'\mu'}\Big)\pi i$$

$$- \frac{1}{rs}\sum_\nu \sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\Big(\mathring{\sigma}_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu'} \alpha_{\nu\mu'}\beta_{\nu\mu'}\Big)\pi i,$$

$$\dot{G}[\mathring{\sigma}] = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\varDelta_{\dot\beta}-1} e^{-\sum\limits_\mu \sum\limits_{\mu'} \sum\limits_\nu \frac{\dot\alpha_{\nu\mu}\dot\beta'_{\nu\mu'}}{\varDelta_{\dot\beta}} \varrho_\mu \varrho_{\mu'}\pi i + 2\sum\limits_\mu \sum\limits_\nu \frac{\dot\beta'_{\nu\mu}}{\varDelta_{\dot\beta}}\left(\mathring{\sigma}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\varepsilon \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right)\varrho_\mu \pi i}$$

ist, wobei:

$$\dot\alpha_{\varepsilon\nu} = \alpha_{\varepsilon\nu},\quad \dot\beta_{\varepsilon\nu} = \beta_{\varepsilon\nu},\quad \dot\gamma_{\varepsilon\nu} = \gamma_{\varepsilon\nu},\quad \dot\delta_{\varepsilon\nu} = \delta_{\varepsilon\nu}, \qquad \binom{\varepsilon = 1, 2, \ldots, q}{\nu = 1, 2, \ldots, p}$$

$$\dot\alpha_{\eta\nu} = \beta_{\eta\nu},\quad \dot\beta_{\eta\nu} = -\alpha_{\eta\nu},\quad \dot\gamma_{\eta\nu} = \delta_{\eta\nu},\quad \dot\delta_{\eta\nu} = -\gamma_{\eta\nu} \qquad \binom{\eta = q+1, q+2, \ldots, p}{\nu = 1, 2, \ldots, p}$$

ist, $\varDelta_{\dot\beta}$ die Determinante $\Sigma \pm \dot\beta_{11}\dot\beta_{22}\ldots\dot\beta_{pp}$ und $\dot\beta'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\dot\beta_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet, und unter $\mathring{\sigma}_1, \mathring{\sigma}_2, \ldots, \mathring{\sigma}_p$ eine beliebige Lösung des Gleichungensystems:

$$(\dot{E}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} e^{-\sum\limits_\mu \sum\limits_{\mu'} \sum\limits_\nu \frac{\dot\alpha_{\nu\mu}\dot\beta'_{\nu\mu'}}{\varDelta_{\dot\beta}} \bar\varrho_\mu^{(i)} \bar\varrho_{\mu'}^{(i)} \pi i + 2\sum\limits_\mu \sum\limits_\nu \frac{\dot\beta'_{\nu\mu}}{\varDelta_{\dot\beta}}\left(\sigma_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\varepsilon \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right)\bar\varrho_\mu^{(i)}\pi i} = 1, \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \end{array}\right.$$

zu verstehen ist, in dem $\bar\varrho_1^{(i)}, \bar\varrho_2^{(i)}, \ldots, \bar\varrho_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ die sämmtlichen Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(\dot{C}) \qquad \sum_{\mu'}\sum_\nu \dot\alpha_{\nu 1}\dot\beta'_{\nu\mu'}\bar\varrho_{\mu'} \equiv 0 \pmod{\varDelta_{\dot\beta}}, \;\ldots,\; \sum_{\mu'}\sum_\nu \dot\alpha_{\nu p}\dot\beta'_{\nu\mu'}\bar\varrho_{\mu'} \equiv 0 \pmod{\varDelta_{\dot\beta}}$$

bezeichnen.

9.

Es soll jetzt endlich der vierte der im ersten Artikel aufgestellten vier Fälle behandelt werden, der dadurch charakterisirt ist, dass bei der vorgelegten linearen Transformation T die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_{\beta}^{(m,n)} = \Sigma \pm \beta_{m_1 n_1} \beta_{m_2 n_2} \ldots \beta_{m_q n_q}$ der Determinante Δ_β einen von Null verschiedenen Werth besitzt, während alle Unterdeterminanten höheren Grades verschwinden. Wie in Art. 6 des fünften Abschnitts gezeigt ist, kann man in diesem Falle die Transformation T aus den drei dort angeschriebenen Transformationen K', $\overline{T}$, K'' in der Form:

$$T = K' \overline{T} K''$$

zusammensetzen, und man kann daher auch die zur Transformation T gehörige Thetaformel aus den drei, zu den Transformationen K', $\overline{T}$, K'' gehörigen Thetaformeln zusammensetzen; dabei wird man beachten, dass die beiden Transformationen K', K'' elementare Transformationen vom Typus T_{I_1} sind, die ihnen entsprechenden Thetaformeln also aus der Formel (I_1) des zweiten Abschnitts durch passende Verfügung über die dort vorkommenden Grössen d hervorgehen; für die Transformation $\overline{T}$ aber die Unterdeterminante $\nabla_{\bar\beta} = \Sigma \pm \bar\beta_{11} \bar\beta_{22} \ldots \bar\beta_{qq}$ q^{ten} Grades der Determinante $\Delta_{\bar\beta}$ von Null verschieden ist, während alle Unterdeterminanten höheren Grades verschwinden, die dieser Transformation entsprechende Thetaformel also aus der Formel ($\mathfrak{T}'$) des vorigen Artikels bei passender Verfügung über die dort vorkommenden α, β, γ, δ hervorgeht. Man erhält auf diese Weise die der vorliegenden Transformation T entsprechende Thetaformel in der Gestalt:

$$(\mathfrak{T}'') \qquad n_1 n_2 (rs)^p \Delta_{\ddot\beta}^{p-1} \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a = \sqrt[+]{\frac{i^{p-q}(-\pi)^p r^p}{\Delta_{\ddot\beta}\,\Delta_A}}\; e^{-\Phi}\, e^{\psi(g,h)}\, e^{\ddot\varphi(\mathring{\delta})}\, \ddot G[\mathring{\delta}]\, H[\mathring{\tau}]$$

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p\\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs-1} e^{-\frac{1}{rs}\sum\limits_{\nu}\eta_\nu\eta'_\nu\pi i + \sum\limits_{\mu}\varkappa_\mu\lambda_\mu\pi i - \frac{1}{rs}\sum\limits_{\nu}\sum\limits_{\mu}(\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu - \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta'_\nu)\pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{rs}\sum\limits_{\nu}\hat g_\nu\eta'_\nu\pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_{\nu}(\hat g_\nu + \mathring{\delta}_\nu + \eta_\nu)\mathring{\tau}_\nu\pi i}\; \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat g + \mathring{\delta} + \eta}{r} \\[2mm] \dfrac{\hat h + \mathring{\tau} + \eta'}{s} \end{bmatrix}((v))_b,$$

bei der v, b, η, η', $\hat g$, $\hat h$, Φ, $\psi(g,h)$, $H[\mathring{\tau}]$, n_1, n_2 dieselbe Bedeutung haben wie in Art. 6, und bei der:

$$\ddot\varphi(\mathring{\delta}) = -\sum_{\nu}\sum_{\nu'}\sum_{\varepsilon}\frac{\ddot\delta_{\nu\varepsilon}\beta'_{\nu'\varepsilon}}{rs\Delta_{\ddot\beta}}\Big(\mathring{\delta}_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu}\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\Big)\Big(\mathring{\delta}_{\nu'} + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu'}\alpha_{\nu'\mu'}\beta_{\nu'\mu'}\Big)\pi i$$

$$-\frac{1}{rs}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\Big(\mathring{\delta}_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu'}\alpha_{\nu\mu'}\beta_{\nu\mu'}\Big)\pi i,$$

$$\ddot{G}[\mathring{\sigma}] = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0,1,\ldots,\Delta_{\ddot{\beta}}-1} e^{-\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_{\nu} \frac{\ddot{\alpha}_{\nu\mu}\ddot{\beta}'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\ddot{\beta}}} \varrho_\mu \varrho_{\mu'} \pi i + 2 \sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu} \frac{\ddot{\beta}'_{\nu\mu}}{\Delta_{\ddot{\beta}}} \left(\mathring{\sigma}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_{\varepsilon} \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right) \varrho_\mu \pi i}.$$

ist, wobei:

$$\ddot{\alpha}_{\varepsilon\nu} = \alpha_{\varepsilon\nu}, \quad \ddot{\beta}_{\varepsilon\nu} = \beta_{\varepsilon\nu}, \quad \ddot{\gamma}_{\varepsilon\nu} = \gamma_{\varepsilon\nu}, \quad \ddot{\delta}_{\varepsilon\nu} = \delta_{\varepsilon\nu}, \qquad \binom{\varepsilon = m_1, m_2, \ldots, m_q}{\nu = 1, 2, \ldots, p}$$

$$\ddot{\alpha}_{\eta\nu} = \beta_{\eta\nu}, \quad \ddot{\beta}_{\eta\nu} = -\alpha_{\eta\nu}, \quad \ddot{\gamma}_{\eta\nu} = \delta_{\eta\nu}, \quad \ddot{\delta}_{\eta\nu} = -\gamma_{\eta\nu} \qquad \binom{\eta = m_{q+1}, m_{q+2}, \ldots, m_p}{\nu = 1, 2, \ldots, p}$$

ist, $\Delta_{\ddot{\beta}}$ die Determinante $\Sigma \pm \ddot{\beta}_{11} \ddot{\beta}_{22} \ldots \ddot{\beta}_{pp}$ und $\ddot{\beta}'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\ddot{\beta}_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet, und unter $\mathring{\sigma}_1, \mathring{\sigma}_2, \ldots, \mathring{\sigma}_p$ eine beliebige Lösung des Gleichungensystems:

$$(\ddot{E}) \qquad \begin{cases} e^{-\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_{\nu} \frac{\ddot{\alpha}_{\nu\mu}\ddot{\beta}'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\ddot{\beta}}} \bar{\varrho}_\mu^{(i)} \bar{\varrho}_{\mu'}^{(i)} \pi i + 2 \sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu} \frac{\ddot{\beta}'_{\nu\mu}}{\Delta_{\ddot{\beta}}} \left(\sigma_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_{\varepsilon} \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right) \bar{\varrho}_\mu^{(i)} \pi i} = 1, \\ i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

zu verstehen ist, in dem $\bar{\varrho}_1^{(i)}, \bar{\varrho}_2^{(i)}, \ldots, \bar{\varrho}_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ die sämmtlichen Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(\ddot{C}) \qquad \sum_{\mu'}\sum_{\nu} \ddot{\alpha}_{\nu 1} \ddot{\beta}'_{\nu\mu'} \bar{\varrho}_{\mu'} \equiv 0 \ (\text{mod. } \Delta_{\ddot{\beta}}), \quad \ldots, \quad \sum_{\mu'}\sum_{\nu} \ddot{\alpha}_{\nu p} \ddot{\beta}'_{\nu\mu'} \bar{\varrho}_{\mu'} \equiv 0 \ (\text{mod. } \Delta_{\ddot{\beta}})$$

bezeichnen.

10.

Die im Vorhergehenden gewonnenen vier Transformationsformeln ($\mathfrak{T}$), ($\mathfrak{S}$), ($\mathfrak{T}'$), ($\mathfrak{T}''$) kann man zu folgendem Endresultate zusammenfassen.

Der linearen Transformation:

$$T = \left| \begin{array}{c|c} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & \frac{\beta_{\mu\nu}}{r} \\ \hline \frac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \frac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{array} \right|,$$

bei der die $4p^2$ Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den $p(2p-1)$ Relationen:

$$(T_1) \qquad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu'} - \alpha_{\varepsilon\mu'}\gamma_{\varepsilon\mu}) = 0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\beta_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'} - \beta_{\varepsilon\mu'}\delta_{\varepsilon\mu}) = 0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'} - \gamma_{\varepsilon\mu}\beta_{\varepsilon\mu'}) = \begin{matrix} rs, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{matrix} \end{gathered} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

oder den damit äquivalenten:

$$(T_2) \qquad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\mu\varepsilon}\beta_{\mu'\varepsilon} - \alpha_{\mu'\varepsilon}\beta_{\mu\varepsilon}) = 0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\gamma_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon} - \gamma_{\mu'\varepsilon}\delta_{\mu\varepsilon}) = 0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon} - \beta_{\mu\varepsilon}\gamma_{\mu'\varepsilon}) = \begin{matrix} rs, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{matrix} \end{gathered} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

genügen, entspricht die Thetaformel:

$$(L) \qquad n_1\, n_2\, (rs)^p \Delta_{\tilde\beta}^{p-1}\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt{\frac{i^{p-\varrho}(-\pi)^p r^p}{\Delta_{\tilde\beta}\Delta_A}}\; e^{-\Phi}\, e^{\psi(g,h)}\, e^{\tilde\varphi(\mathring\delta)}\, \tilde G[\mathring\sigma]\, H[\mathring\tau]$$

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs-1} e^{-\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu \eta'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu \lambda_\mu \pi i - \frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \sum\limits_\mu (\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu - \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta'_\nu)\pi i}$$

$$\times e^{-\frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \hat g_\nu \eta'_\nu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu (\hat g_\nu + \mathring\sigma_\nu + \eta_\nu)\mathring\tau_\nu \pi i}\; \vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{\hat g + \mathring\sigma + \eta}{r} \\ \dfrac{\hat h + \mathring\tau + \eta'}{s} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b.$$

In dieser Formel ist zunächst:

$$v_\nu = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_\mu A'_{\mu\nu} u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_\mu A'_{\mu\nu} B_{\mu\nu'}, \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

wenn man mit $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ die Ausdrücke:

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{r}\Big(\alpha_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \beta_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}\Big), \qquad B_{\mu\nu} = \frac{1}{s}\Big(\gamma_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \delta_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}\Big), \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

mit Δ_A die Determinante $\Sigma \pm A_{11} A_{22} \ldots A_{pp}$ und mit $A'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $A_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet; es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\eta_\nu = \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu - \beta_{\nu\mu}\lambda_\mu), \qquad \eta'_\nu = \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu + \delta_{\nu\mu}\lambda_\mu), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\hat g_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu} + \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu} g_\mu - \beta_{\nu\mu} h_\mu), \quad \hat h_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu} + \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu} g_\mu + \delta_{\nu\mu} h_\mu),$$

$$\Phi = \frac{1}{r\Delta_A}\sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu \beta_{\nu\mu} A'_{\mu'\nu} u_\mu u_{\mu'},$$

$$\psi(g,h) = \frac{1}{rs}\sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu (\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu'} g_\mu g_{\mu'} - 2\gamma_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu'} g_\mu h_{\mu'} + \beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu'} h_\mu h_{\mu'})\pi i$$

$$- \frac{1}{rs}\sum_\nu \sum_\mu \sum_{\mu'} \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}(\alpha_{\nu\mu'} g_{\mu'} - \beta_{\nu\mu'} h_{\mu'})\pi i;$$

es ist ferner:

$$H[\tau] = {\sum_{\substack{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1,\ldots,rs-1}}' e^{\frac{1}{rs}\sum\limits_\nu \eta_\nu\eta'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu\lambda_\mu \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_\nu \left[\left(\mathring\tau_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\eta_\nu - \left(\mathring\sigma_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\eta'_\nu\right]\pi i},$$

wobei der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass an Stelle des Systems der $2p$ Grössen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ von den $(rs)^{2p}$ Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, rs-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung nur diejenigen treten sollen, für welche die p Zahlen

$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ sämmtlich durch r theilbar sind, und unter $\mathring{\tau}_1, \mathring{\tau}_2, \ldots, \mathring{\tau}_p$ irgend eine Lösung des Gleichungensystems (E):

$$(\bar{E}) \qquad \begin{cases} e^{\frac{1}{rs}\sum\limits_{\nu} \bar{\eta}_\nu^{(i)} \bar{\eta}_\nu'^{(i)} \pi i + \sum\limits_{\mu} \bar{\varkappa}_\mu^{(i)} \bar{\lambda}_\mu^{(i)} \pi i - \frac{2}{rs}\sum\limits_{\nu}\left[\left(\tau_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_{\mu}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}_\nu^{(i)} - \left(\mathring{\delta}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_{\mu}\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\bar{\eta}_\nu'^{(i)}\right]\pi i} = 1, \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, \overline{m}, \end{cases}$$

zu verstehen ist, in dem zur Abkürzung:

$$\sum_\mu \left(\alpha_{\nu\mu}\bar{\varkappa}_\mu^{(i)} - \beta_{\nu\mu}\bar{\lambda}_\mu^{(i)}\right) = \bar{\eta}_\nu^{(i)}, \qquad \sum_\mu \left(-\gamma_{\nu\mu}\bar{\varkappa}_\mu^{(i)} + \delta_{\nu\mu}\bar{\lambda}_\mu^{(i)}\right) = \bar{\eta}_\nu'^{(i)} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\ldots,\overline{m} \\ \nu=1,2,\ldots,p \end{pmatrix}$$

gesetzt ist, und in dem $\bar{\varkappa}_1^{(i)}, \ldots, \bar{\varkappa}_p^{(i)}, \bar{\lambda}_1^{(i)}, \ldots, \bar{\lambda}_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \overline{m})$ diejenigen Normallösungen $\bar{\varkappa}_1, \ldots, \bar{\varkappa}_p, \bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_p$ des Congruenzensystems:

$$(\bar{C}) \qquad s\bar{\eta}_1 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad s\bar{\eta}_2 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \ldots, \quad s\bar{\eta}_p \equiv 0 \pmod{rs}$$

sind, welche der weiteren Bedingung genügen, dass durch sie:

$$(\bar{C}') \qquad \sum_\nu \bar{\eta}_\nu \eta_\nu' \equiv 0 \pmod{rs}$$

wird für jedes System von $2p$ ganzen Zahlen $\varkappa, \lambda$, für welches die p Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ sämmtlich durch r theilbar sind; es bezeichnen weiter:

n_1 die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$s\eta_1 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad s\eta_2 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \ldots, \quad s\eta_p \equiv 0 \pmod{rs},$$
$$r\eta_1' \equiv 0 \pmod{rs}, \quad r\eta_2' \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \ldots, \quad r\eta_p' \equiv 0 \pmod{rs},$$

n_2 die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$\eta_1 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \eta_2 \equiv 0 \pmod{rs}, \quad \ldots, \quad \eta_p \equiv 0 \pmod{rs};$$

es ist weiter:

$$\tilde{\varphi}(\mathring{\sigma}) = -\sum_\nu \sum_{\nu'} \sum_\varepsilon \frac{\mathring{\delta}_{\nu\varepsilon}\tilde{\beta}'_{\nu'\varepsilon}}{rs\Delta_{\tilde{\beta}}} \left(\mathring{\sigma}_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\left(\mathring{\sigma}_{\nu'} + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu'} \alpha_{\nu'\mu'}\beta_{\nu'\mu'}\right)\pi i$$
$$- \frac{1}{rs}\sum_\nu \sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\left(\mathring{\sigma}_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu'} \alpha_{\nu\mu'}\beta_{\nu\mu'}\right)\pi i,$$

$$\tilde{G}[\mathring{\sigma}] = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_p}^{0,1,\ldots,\Delta_{\tilde{\beta}}-1} e^{-\sum\limits_\mu \sum\limits_{\mu'} \sum\limits_\nu \frac{\tilde{\alpha}_{\nu\mu}\tilde{\beta}'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\tilde{\beta}}}\varrho_\mu\varrho_{\mu'}\pi i + 2\sum\limits_\mu \sum\limits_\nu \frac{\tilde{\beta}'_{\nu\mu}}{\Delta_{\tilde{\beta}}}\left(\mathring{\sigma}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\varepsilon \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right)\varrho_\mu \pi i},$$

wobei $\Delta_{\tilde{\beta}}$ die Determinante $\Sigma \pm \tilde{\beta}_{11}\tilde{\beta}_{22}\ldots\tilde{\beta}_{pp}$ und $\tilde{\beta}'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\tilde{\beta}_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet, und unter $\mathring{\sigma}_1, \mathring{\sigma}_2, \ldots, \mathring{\sigma}_p$ eine beliebige Lösung des Gleichungensystems:

$$(\tilde{E}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} e^{-\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_{\nu} \frac{\tilde{\alpha}_{\nu\mu}\tilde{\beta}'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\tilde{\beta}}} \bar{\varrho}_{\mu}^{(i)} \bar{\varrho}_{\mu'}^{(i)} \pi i + 2 \sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu} \frac{\tilde{\beta}'_{\nu\mu}}{\Delta_{\tilde{\beta}}} \left(\sigma_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_{s} \alpha_{\nu s}\beta_{\nu s}\right) \bar{\varrho}_{\mu}^{(i)} \pi i} = 1, \\ \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, m, \end{array} \right.$$

zu verstehen ist, in dem $\bar{\varrho}_1^{(i)}, \bar{\varrho}_2^{(i)}, \ldots, \bar{\varrho}_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ die sämmtlichen Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(\tilde{C}) \qquad \sum_{\mu'}\sum_{\nu} \tilde{\alpha}_{\nu 1}\tilde{\beta}'_{\nu\mu'}\bar{\varrho}_{\mu'} \equiv 0 \;(\text{mod. } \Delta_{\tilde{\beta}}), \; \ldots, \; \sum_{\mu'}\sum_{\nu} \tilde{\alpha}_{\nu p}\tilde{\beta}'_{\nu\mu'}\bar{\varrho}_{\mu'} \equiv 0 \;(\text{mod. } \Delta_{\tilde{\beta}})$$

bezeichnen; es ist endlich bezüglich der Bedeutung des unter dem Wurzelzeichen vorkommenden Buchstabens ϱ und der Bedeutung der Buchstaben $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}$ das Folgende zu bemerken:

Fall I: Sind in der vorgelegten linearen Transformation T die Zahlen β sämmtlich der Null gleich, so ist $\varrho = 0$ und:

$$\tilde{\alpha}_{\mu\nu} = 0, \quad \tilde{\beta}_{\mu\nu} = -\alpha_{\mu\nu}, \quad \tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad \tilde{\delta}_{\mu\nu} = -\gamma_{\mu\nu} \qquad \binom{\mu = 1, 2, \ldots, p}{\nu = 1, 2, \ldots, p}$$

zu setzen;

Fall II: Sind in der vorgelegten linearen Transformation T die Zahlen β nicht sämmtlich der Null gleich, und besitzt ihre Determinante $\Delta_\beta = \Sigma \pm \beta_{11}\beta_{22}\ldots\beta_{pp}$ einen von Null verschiedenen Werth, so ist $\varrho = p$ und:

$$\tilde{\alpha}_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu}, \quad \tilde{\beta}_{\mu\nu} = \beta_{\mu\nu}, \quad \tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}, \quad \tilde{\delta}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \qquad \binom{\mu = 1, 2, \ldots, p}{\nu = 1, 2, \ldots, p}$$

zu setzen;

Fall III: Sind in der vorgelegten linearen Transformation T die Zahlen β nicht sämmtlich der Null gleich, und besitzt die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_\beta = \Sigma \pm \beta_{11}\beta_{22}\ldots\beta_{qq}$ der Determinante Δ_β einen von Null verschiedenen Werth, während alle Unterdeterminanten $q + 1^{\text{ten}}$ Grades von Δ_β verschwinden, so ist $\varrho = q$ und:

$$\tilde{\alpha}_{\varepsilon\nu} = \alpha_{\varepsilon\nu}, \quad \tilde{\beta}_{\varepsilon\nu} = \beta_{\varepsilon\nu}, \quad \tilde{\gamma}_{\varepsilon\nu} = \gamma_{\varepsilon\nu}, \quad \tilde{\delta}_{\varepsilon\nu} = \delta_{\varepsilon\nu}, \qquad \binom{\varepsilon = 1, 2, \ldots, q}{\nu = 1, 2, \ldots, p}$$

$$\tilde{\alpha}_{\eta\nu} = \beta_{\eta\nu}, \quad \tilde{\beta}_{\eta\nu} = -\alpha_{\eta\nu}, \quad \tilde{\gamma}_{\eta\nu} = \delta_{\eta\nu}, \quad \tilde{\delta}_{\eta\nu} = -\gamma_{\eta\nu} \qquad \binom{\eta = q+1, q+2, \ldots, p}{\nu = 1, 2, \ldots, p}$$

zu setzen;

Fall IV: Sind in der vorgelegten linearen Transformation T die Zahlen β nicht sämmtlich der Null gleich, und besitzt die Unterdeterminante q^{ten} Grades $\nabla_\beta^{(m,n)} = \Sigma \pm \beta_{m_1 n_1}\beta_{m_2 n_2}\ldots\beta_{m_q n_q}$ der Determinante Δ_β einen von Null verschiedenen Werth, während alle Unterdeterminanten $q + 1^{\text{ten}}$ Grades von Δ_β verschwinden, so ist $\varrho = q$ und:

$$\tilde{\alpha}_{\varepsilon\nu} = \alpha_{\varepsilon\nu}, \quad \tilde{\beta}_{\varepsilon\nu} = \beta_{\varepsilon\nu}, \quad \tilde{\gamma}_{\varepsilon\nu} = \gamma_{\varepsilon\nu}, \quad \tilde{\delta}_{\varepsilon\nu} = \delta_{\varepsilon\nu}, \qquad \binom{\varepsilon = m_1, m_2, \ldots, m_q}{\nu = 1, 2, \ldots, p}$$

$$\tilde{\alpha}_{\eta\nu} = \beta_{\eta\nu}, \quad \tilde{\beta}_{\eta\nu} = -\alpha_{\eta\nu}, \quad \tilde{\gamma}_{\eta\nu} = \delta_{\eta\nu}, \quad \tilde{\delta}_{\eta\nu} = -\gamma_{\eta\nu} \qquad \binom{\eta = m_{q+1}, m_{q+2}, \ldots, m_p}{\nu = 1, 2, \ldots, p}$$

zu setzen.

11.

Besondere Erwähnung verdient der Fall, wo die beiden Zahlen r und s den Werth 1 besitzen. Setzt man in der soeben aufgestellten Formel (L) $r=s=1$, so findet man, dass der ganzzahligen linearen Transformation:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \alpha_{\mu\nu} & \beta_{\mu\nu} \\ \hline \gamma_{\mu\nu} & \delta_{\mu\nu} \end{array}\right|,$$

bei der die $4p^2$ Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die $p(2p-1)$ Relationen:

$$(T_1)\qquad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu'} - \alpha_{\varepsilon\mu'}\gamma_{\varepsilon\mu}) = 0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\beta_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'} - \beta_{\varepsilon\mu'}\delta_{\varepsilon\mu}) = 0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'} - \gamma_{\varepsilon\mu}\beta_{\varepsilon\mu'}) = \begin{array}{l} 1, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{array} \end{gathered} \qquad {\scriptstyle (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)}$$

oder die damit äquivalenten:

$$(T_2)\qquad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\mu\varepsilon}\beta_{\mu'\varepsilon} - \alpha_{\mu'\varepsilon}\beta_{\mu\varepsilon}) = 0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\gamma_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon} - \gamma_{\mu'\varepsilon}\delta_{\mu\varepsilon}) = 0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon} - \beta_{\mu\varepsilon}\gamma_{\mu'\varepsilon}) = \begin{array}{l} 1, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{array} \end{gathered} \qquad {\scriptstyle (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)}$$

erfüllen, die Thetaformel:

$$(L_1)\qquad \Delta_{\tilde{\beta}}^{p-1}\,\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{i^{p-\varrho}(-\pi)^p}{\Delta_{\tilde{\beta}}\Delta_A}}\; e^{-\Phi}\, e^{\psi(g,h)}\, e^{\tilde{\varphi}(0)}\tilde{G}[0]\;\vartheta\begin{bmatrix} \hat{g} \\ \hat{h} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b$$

entspricht.

In dieser Formel ist zunächst:

$$v_\nu = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_\mu A'_{\mu\nu}u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_\mu A'_{\mu\nu}B_{\mu\nu'}, \qquad {\scriptstyle (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)}$$

wenn man mit $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ die Ausdrücke:

$$A_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \beta_{\nu\varkappa}a_{\mu\varkappa}, \qquad B_{\mu\nu} = \gamma_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \delta_{\nu\varkappa}a_{\mu\varkappa}, \qquad {\scriptstyle (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)}$$

mit Δ_A die Determinante $\Sigma \pm A_{11}A_{22}\ldots A_{pp}$ und mit $A'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $A_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet; es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\hat{g}_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu} + \sum_\mu(\alpha_{\nu\mu}g_\mu - \beta_{\nu\mu}h_\mu), \qquad \hat{h}_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu} + \sum_\mu(-\gamma_{\nu\mu}g_\mu + \delta_{\nu\mu}h_\mu), \qquad {\scriptstyle (\nu = 1, 2, \ldots, p)}$$

$$\Phi = \frac{1}{\Delta_A}\sum_\mu\sum_{\mu'}\sum_\nu \beta_{\nu\mu}A'_{\mu'\nu}u_\mu u_{\mu'},$$

$$\psi(g,h) = \sum_\mu\sum_{\mu'}\sum_\nu(\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu'}g_\mu g_{\mu'} - 2\gamma_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu'}g_\mu h_{\mu'} + \beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu'}h_\mu h_{\mu'})\pi i - \sum_\nu\sum_\mu\sum_{\mu'}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}(\alpha_{\nu\mu'}g_{\mu'} - \beta_{\nu\mu'}h_{\mu'})\pi i,$$

$$\tilde{\Phi}(0) = -\frac{1}{4}\sum_{\nu}\sum_{\nu'}\sum_{\varepsilon}\frac{\tilde{\delta}_{\nu\varepsilon}\tilde{\beta}'_{\nu'\varepsilon}}{\Delta_{\tilde{\beta}}}\sum_{\mu}\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\sum_{\mu'}\alpha_{\nu'\mu'}\beta_{\nu'\mu'}\pi i - \frac{1}{2}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\sum_{\mu'}\alpha_{\nu\mu'}\beta_{\nu\mu'}\pi i,$$

$$\tilde{G}[0] = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\Delta_{\tilde{\beta}}-1} e^{-\sum_{\mu}\sum_{\mu'}\sum_{\nu}\frac{\tilde{\alpha}_{\nu\mu}\tilde{\beta}'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\tilde{\beta}}}\varrho_{\mu}\varrho_{\mu'}\pi i + \sum_{\mu}\sum_{\nu}\frac{\tilde{\beta}'_{\nu\mu}}{\Delta_{\tilde{\beta}}}\sum_{\varepsilon}\alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\varrho_{\mu}\pi i},$$

wobei $\Delta_{\tilde{\beta}}$ die Determinante $\Sigma \pm \tilde{\beta}_{11}\tilde{\beta}_{22}\ldots\tilde{\beta}_{pp}$ und $\tilde{\beta}'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\tilde{\beta}_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet; es gilt endlich bezüglich des unter dem Wurzelzeichen vorkommenden Buchstabens ϱ und der Buchstaben $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\delta}$ das am Ende des vorigen Artikels Bemerkte.

Siebenter Abschnitt.

Von den nicht linearen Transformationen.

1.

Bis jetzt sind ausschliesslich lineare Transformationen, d. h. solche, für welche die Ordnungszahl t den Werth 1 hat, betrachtet worden. Ist die rationale Zahl t von 1 verschieden, so drücke man sie durch einen Bruch mit kleinstem Zähler und Nenner aus, setze also $t = \frac{n}{n'}$, wo n, n' positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind. Nennt man dann die Transformation T eine zur Zahl $\frac{n}{n'}$ gehörige, so kann man unter Anwendung des bisher stets gebrauchten Princips der Zusammensetzung einer Transformation aus mehreren jede zur Zahl $\frac{n}{n'}$ gehörige Transformation:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \mathfrak{a}_{\mu\nu} & \mathfrak{b}_{\mu\nu} \\ \hline \mathfrak{c}_{\mu\nu} & \mathfrak{d}_{\mu\nu} \end{array}\right|$$

aus einer speciellen zur Zahl $\frac{1}{n'}$ gehörigen, einer linearen und einer speciellen zur Zahl n gehörigen Transformation in der Form:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \frac{1}{n'} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{n'} \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \end{array}\right| \; \left|\begin{array}{c|c} \frac{n'\mathfrak{a}_{\mu\nu}}{n} & \frac{\mathfrak{b}_{\mu\nu}}{n} \\ \hline n'\mathfrak{c}_{\mu\nu} & \mathfrak{d}_{\mu\nu} \end{array}\right| \; \left|\begin{array}{c|c} \begin{matrix} n & \cdots & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & n \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \end{array}\right|$$

zusammensetzen, und man kann daher auch die der Transformation T entsprechende Thetaformel durch Zusammensetzung der drei, den angeschriebenen Transformationen entsprechenden Thetaformeln erhalten. Die der mittleren, linearen Transformation entsprechende Thetaformel ergibt sich aus der im vorigen Artikel aufgestellten Formel (L) durch passende Verfügung über die darin vorkommenden Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \vartheta, r, s$; die der ersten und dritten Transformation entsprechenden Thetaformeln sollen jetzt aufgestellt werden.

2.

Führt man auf der rechten Seite der Gleichung:

$$(F)\qquad \vartheta^n(\!(u)\!)_a = \sum_{\substack{m_1^{(1)},\dots,m_p^{(1)}\\ \cdots\\ m_1^{(n)},\dots,m_p^{(n)}}}^{-\infty,\dots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left(m_\mu^{(1)} m_{\mu'}^{(1)}+\cdots+m_\mu^{(n)} m_{\mu'}^{(n)}\right)+2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(m_\mu^{(1)}+\cdots+m_\mu^{(n)}\right)u_\mu}$$

an Stelle der Summationsbuchstaben $m_1^{(n)}, \dots, m_p^{(n)}$ neue Summationsbuchstaben $\overline{m}_1, \dots, \overline{m}_p$ ein mit Hülfe der Gleichung:

$$m_\mu^{(n)} = \overline{m}_\mu - m_\mu^{(1)} - m_\mu^{(2)} - \cdots - m_\mu^{(n-1)} \qquad (\mu = 1, 2, \dots, p)$$

und setzt weiter noch:

$$\overline{m}_\mu = n r_\mu + \varkappa_\mu, \qquad (\mu = 1, 2, \dots, p)$$

indem man mit $\varkappa_\mu$ den kleinsten positiven Rest von $\overline{m}_\mu$ nach dem Modul n bezeichnet, so geht aus der Gleichung (F) die neue:

$$(F_1)\qquad \vartheta^n(\!(u)\!)_a = \sum_{\varkappa_1,\dots,\varkappa_p}^{0,1,\dots,n-1}\ \sum_{r_1,\dots,r_p}^{-\infty,\dots,+\infty} A^{(a,n)}_{\substack{\varkappa_1\dots\varkappa_p\\ r_1\dots r_p}}\, e^{2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(r_\mu+\frac{\varkappa_\mu}{n}\right)n u_\mu}$$

hervor, bei der zur Abkürzung:

$$A^{(a,n)}_{\substack{\varkappa_1\dots\varkappa_p\\ r_1\dots r_p}} = \sum_{\substack{m_1^{(1)},\dots,m_p^{(1)}\\ \cdots\\ m_1^{(n-1)},\dots,m_p^{(n-1)}}}^{-\infty,\dots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left[m_\mu^{(1)} m_{\mu'}^{(1)}+\cdots+m_\mu^{(n-1)} m_{\mu'}^{(n-1)}+\left(m_\mu^{(1)}+\cdots+m_\mu^{(n-1)}-n r_\mu-\varkappa_\mu\right)\left(m_{\mu'}^{(1)}+\cdots+m_{\mu'}^{(n-1)}-n r_{\mu'}-\varkappa_{\mu'}\right)\right]}$$

gesetzt ist. Drückt man ferner die Constanten A mit Hülfe der Gleichung:

$$A^{(a,n)}_{\substack{\varkappa_1\dots\varkappa_p\\ r_1\dots r_p}} = A^{(a,n)}_{\substack{\varkappa_1\dots\varkappa_p\\ 0\dots 0}}\, e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} n a_{\mu\mu'}\left(r_\mu+\frac{\varkappa_\mu}{n}\right)\left(r_{\mu'}+\frac{\varkappa_{\mu'}}{n}\right)-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\frac{\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'}}{n}}$$

durch die n^p speciellen $A^{(a,n)}_{\substack{\varkappa_1\dots\varkappa_p\\ 0\dots 0}}$ unter ihnen aus und setzt allgemein:

$$A^{(a,n)}_{\substack{\varkappa_1\dots\varkappa_p\\ 0\dots 0}}\, e^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\frac{\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'}}{n}} = K^{(a,n)}_{\varkappa_1\dots\varkappa_p},$$

so geht die Gleichung (F_1) in die Gleichung:

$$(F_2)\qquad \vartheta^n((u))_a = \sum_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p}^{0,1,\ldots,n-1} K^{(a,n)}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p} \sum_{r_1,\ldots,r_p}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} n a_{\mu\mu'}\left(r_\mu+\frac{\varkappa_\mu}{n}\right)\left(r_{\mu'}+\frac{\varkappa_{\mu'}}{n}\right)+2\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(r_\mu+\frac{\varkappa_\mu}{n}\right) n u_\mu},$$

bei der:

$$K^{(a,n)}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}$$

$$= \sum_{\substack{m_1^{(1)},\ldots,m_p^{(1)}\\ \cdots\\ m_1^{(n-1)},\ldots,m_p^{(n-1)}}}^{-\infty,\ldots,+\infty} e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\sum\limits_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'}\left[m_\mu^{(1)}m_{\mu'}^{(1)}+\cdots+m_\mu^{(n-1)}m_{\mu'}^{(n-1)}+\left(m_\mu^{(1)}+\cdots+m_\mu^{(n-1)}-\varkappa_\mu\right)\left(m_{\mu'}^{(1)}+\cdots+m_{\mu'}^{(n-1)}-\varkappa_{\mu'}\right)-\frac{\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'}}{n}\right]}$$

ist, über, und aus dieser geht, wenn man die auf ihrer rechten Seite vorkommende p-fach unendliche Reihe durch die damit identische Thetafunction ersetzt, die Formel:

$$(\Theta_0)\qquad \vartheta^n((u))_a = \sum_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p}^{0,1,\ldots,n-1} K^{(a,n)}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}\, \vartheta\begin{bmatrix}\frac{\varkappa}{n}\\ 0\end{bmatrix}((nu))_{na}$$

hervor.

Aus der Formel (Θ_0) folgt durch passende Änderung der Variablen u die allgemeinere:

$$(\Theta)\qquad \vartheta^n\begin{bmatrix}g\\ h\end{bmatrix}((u))_a = \sum_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p}^{0,1,\ldots,n-1} K^{(a,n)}_{\varkappa_1\ldots\varkappa_p}\, \vartheta\begin{bmatrix}g+\frac{\varkappa}{n}\\ nh\end{bmatrix}((nu))_{na},$$

in der $g_1, \ldots, g_p, h_1, \ldots, h_p$ beliebige reelle Constanten bezeichnen.

Die Formeln (Θ_0), (Θ) sind von den Formeln (Π_0), (Π_0') im vierten Abschnitte des ersten Theiles nicht verschieden, und man kann ohne Mühe von der jetzt erhaltenen neuen Ausdrucksform der Constanten K zu der früheren auf Seite 31 angeschriebenen direkt gelangen. Es ist dazu nur nöthig, an Stelle der jetzigen Summationsbuchstaben m neue Summationsbuchstaben n mit Hülfe der Gleichungen:

$$\begin{aligned}
m_\mu^{(1)} &= n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + \cdots + n_\mu^{(n-2)} + n_\mu^{(n-1)},\\
m_\mu^{(2)} &= -n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + \cdots + n_\mu^{(n-2)} + n_\mu^{(n-1)},\\
m_\mu^{(3)} &= -2n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + \cdots + n_\mu^{(n-2)} + n_\mu^{(n-1)}, \qquad (\mu=1,2,\ldots,p)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
m_\mu^{(n-1)} &= -(n-2)n_\mu^{(n-2)} + n_\mu^{(n-1)}
\end{aligned}$$

einzuführen und zu beachten, dass dadurch:

$$m_\mu^{(1)}m_{\mu'}^{(1)}+\cdots+m_\mu^{(n-1)}m_{\mu'}^{(n-1)}+\left(m_\mu^{(1)}+\cdots+m_\mu^{(n-1)}-\varkappa_\mu\right)\left(m_{\mu'}^{(1)}+\cdots+m_{\mu'}^{(n-1)}-\varkappa_{\mu'}\right)-\frac{\varkappa_\mu\varkappa_{\mu'}}{n}$$

$$= 1.2\,n_\mu^{(1)}n_{\mu'}^{(1)} + 2.3\,n_\mu^{(2)}n_{\mu'}^{(2)} + \cdots + (n-2)(n-1)\,n_\mu^{(n-2)}n_{\mu'}^{(n-2)} + (n-1)n\left(n_\mu^{(n-1)}-\frac{\varkappa_\mu}{n}\right)\left(n_{\mu'}^{(n-1)}-\frac{\varkappa_{\mu'}}{n}\right)$$

wird, und dass man die Summation nach den n so ausführen kann, dass man:

$$n_\mu^{(1)} = \hat{n}_\mu^{(1)} + \frac{1}{1.2}\,\varepsilon_\mu^{(1)},$$
$$n_\mu^{(2)} = \hat{n}_\mu^{(2)} + \frac{1}{2.3}\,(\varepsilon_\mu^{(1)} + 2\varepsilon_\mu^{(2)}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$
$$n_\mu^{(n-2)} = \hat{n}_\mu^{(n-2)} + \frac{1}{(n-2)(n-1)}\,(\varepsilon_\mu^{(1)} + 2\varepsilon_\mu^{(2)} + \cdots + \overline{n-2}\,\varepsilon_\mu^{(n-2)}),$$
$$n_\mu^{(n-1)} = \hat{n}_\mu^{(n-1)} + \frac{1}{(n-1)}\,(\varepsilon_\mu^{(1)} + 2\varepsilon_\mu^{(2)} + \cdots + \overline{n-2}\,\varepsilon_\mu^{(n-2)})$$

setzt und sodann nach allen Grössen $\hat{n}$ von $-\infty$ bis $+\infty$, nach $\varepsilon_\mu^{(\nu)}$ aber für $\substack{\nu = 1, 2, \ldots, n-2 \\ \mu = 1, 2, \ldots, p}$ von 0 bis ν summirt.

3.

Es soll jetzt nachgewiesen werden, dass die durch die Formel (Θ) repräsentirte Umformung der Function $\vartheta^n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a$ eine Transformation im Sinne der im ersten Abschnitte entwickelten Transformationstheorie ist. Zu dem Ende definire man $4p^2$ rationale Zahlen $\mathfrak{a}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{b}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{c}_{\mu\nu}$, $\mathfrak{d}_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{a}_{\mu\nu} = \begin{matrix} \frac{1}{n}, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \end{matrix} \qquad \mathfrak{b}_{\mu\nu} = 0,$$
$$(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$
$$\mathfrak{c}_{\mu\nu} = 0, \qquad \mathfrak{d}_{\mu\nu} = \begin{matrix} 1, \text{ wenn } \mu = \nu, \\ 0, \text{ wenn } \mu \gtrless \nu, \end{matrix}$$

indem man beachtet, dass diese Zahlen eine zur Zahl $t = \frac{1}{n}$ gehörige Transformation bestimmen, und führe dieselben in die Gleichungen (1) bis (6) auf Seite 65 ein. Die Gleichungen (5), (6) gehen dann in die Gleichungen:

$$v_\nu = n u_\nu, \qquad b_{\nu\nu'} = n a_{\nu\nu'} \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

über, und man erkennt daraus, dass die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T_n = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{n} & \cdots & 0 & & & \\ & \cdots & & & 0 & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{n} & & & \\ \hline & & & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & & & \cdots & \\ & & & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsproblems durch die Formel:

$$(N) \qquad \vartheta^n\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p}^{0, 1, \ldots, n-1} K_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}^{(a, n)}\, \vartheta\begin{bmatrix} g + \frac{\varkappa}{n} \\ nh \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b$$

geliefert wird, bei der:

$$v_\nu = n u_\nu, \qquad b_{\nu\nu'} = n a_{\nu\nu'} \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

ist, während die g, h beliebige reelle Constanten bezeichnen.

Entsprechend wird die Lösung des durch die Charakteristik:

$$T_n^{-1} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} n & \ldots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \ldots & n & & & \\ \hline & & & 1 & \ldots & 0 \\ & 0 & & & \ldots & \\ & & & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right|$$

bestimmten, zu dem obigen inversen Transformationsproblems durch die aus der Formel (N) durch Umkehrung entstehende Formel:

$$(\overline{N}) \qquad n^p K^{(a,n)}_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p}\, \vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b = \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_p}^{0,1,\ldots,n-1} \vartheta^n \begin{bmatrix} k - \frac{\varkappa}{n} \\ \frac{l+\lambda}{n} \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a\, e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} k_\mu \lambda_\mu}$$

gegeben, bei der:

$$u_\mu = \frac{v_\mu}{n}, \qquad a_{\mu\mu'} = \frac{b_{\mu\mu'}}{n} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

ist, während die k, l beliebige reelle Constanten bezeichnen.

4.

Man gehe jetzt auf die vorgelegte, zur Zahl $\frac{n}{n'}$ gehörige Transformation T zurück und stelle in derselben sowohl die $2p^2$ rationalen Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, als auch die $2p^2$ rationalen Zahlen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ als Brüche mit gemeinsamem Nenner dar, indem man für $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p$:

$$\mathfrak{a}_{\mu\nu} = \frac{\alpha_{\mu\nu}}{r}, \qquad \mathfrak{b}_{\mu\nu} = \frac{\beta_{\mu\nu}}{r}, \qquad \mathfrak{c}_{\mu\nu} = \frac{\gamma_{\mu\nu}}{s}, \qquad \mathfrak{d}_{\mu\nu} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{s}$$

setzt, wobei die α, β, γ, δ ganze, r und s positive ganze Zahlen bezeichnen. Die Transformation T nimmt dann die Gestalt:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \frac{\alpha_{\mu\nu}}{r} & \frac{\beta_{\mu\nu}}{r} \\ \hline \frac{\gamma_{\mu\nu}}{s} & \frac{\delta_{\mu\nu}}{s} \end{array}\right|,$$

an, wobei zwischen den ganzen Zahlen α, β, γ, δ die $p(2p-1)$ Relationen:

$$(T_1) \qquad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\varepsilon\mu}\gamma_{\varepsilon\mu'} - \alpha_{\varepsilon\mu'}\gamma_{\varepsilon\mu}) = 0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\beta_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'} - \beta_{\varepsilon\mu'}\delta_{\varepsilon\mu}) = 0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\varepsilon\mu}\delta_{\varepsilon\mu'} - \gamma_{\varepsilon\mu}\beta_{\varepsilon\mu'}) = \begin{matrix} \frac{n}{n'} rs, & \text{wenn } \mu' = \mu, \\ 0, & \text{wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{matrix} \end{gathered} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

oder die damit äquivalenten:

$$(T_2)\qquad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\mu\varepsilon}\beta_{\mu'\varepsilon}-\alpha_{\mu'\varepsilon}\beta_{\mu\varepsilon})=0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\gamma_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon}-\gamma_{\mu'\varepsilon}\delta_{\mu\varepsilon})=0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p}(\alpha_{\mu\varepsilon}\delta_{\mu'\varepsilon}-\beta_{\mu\varepsilon}\gamma_{\mu'\varepsilon})=\begin{cases}\frac{n}{n'}rs, & \text{wenn } \mu'=\mu,\\ 0, & \text{wenn } \mu'\gtrless\mu,\end{cases} \end{gathered} \qquad (\mu,\mu'=1,2,\ldots,p)$$

bestehen, und es wird weiter die in Art. 1 angeschriebene Zerlegung der Transformation T nunmehr durch die Gleichung:

$$T=\left|\begin{array}{ccc|ccc}\frac{1}{n'} & \cdots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{n'} & & & \\ \hline & & & 1 & \cdots & 0\\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot\\ & & & 0 & \cdots & 1\end{array}\right| \; \left|\begin{array}{c|c}\frac{n'\alpha_{\mu\nu}}{nr} & \frac{\beta_{\mu\nu}}{nr}\\ \hline \frac{n'\gamma_{\mu\nu}}{s} & \frac{\delta_{\mu\nu}}{s}\end{array}\right| \; \left|\begin{array}{ccc|ccc}n & \cdots & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \\ 0 & \cdots & n & & & \\ \hline & & & 1 & \cdots & 0\\ & 0 & & \cdot & \cdot & \cdot\\ & & & 0 & \cdots & 1\end{array}\right|$$

repräsentirt.

Mit Rücksicht auf die Resultate des letzten Artikels erkennt man dann sofort, dass die zur ersten dieser drei Transformationen gehörige Thetaformel aus der Formel (N) hervorgeht, wenn man darin n durch n' ersetzt, die zur dritten Transformation gehörige Thetaformel aber die Formel $(\overline{N})$ ist. Setzt man diese Formeln mit der zur mittleren, linearen Transformation gehörigen Thetaformel, welche aus der Formel (L) auf Seite 118 hervorgeht, wenn man darin die Grössen:

$$r, \qquad s, \qquad \alpha_{\mu\nu}, \qquad \beta_{\mu\nu}, \qquad \gamma_{\mu\nu}, \qquad \delta_{\mu\nu},$$

für jedes μ und ν von 1 bis p durch die Grössen:

$$nr, \qquad s, \qquad n'\alpha_{\mu\nu}, \qquad \beta_{\mu\nu}, \qquad n'\gamma_{\mu\nu}, \qquad \delta_{\mu\nu}$$

ersetzt, in der vorgeschriebenen Reihenfolge zusammen, so erhält man die zu der vorgelegten Transformation T gehörige Thetaformel in der Gestalt:

$$(A)\qquad \begin{aligned} &\frac{n'_1 n'_2 n_3}{n_4}\left(\frac{nrs}{n'}\right)^p \overline{\Delta}'^{\,p-1}_{\tilde\beta}\, L^{(b,n)}_{\mathring{\varepsilon}_1\ldots\mathring{\varepsilon}_p}\, \vartheta^{n'}\begin{bmatrix}g\\h\end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{i^{p-\varrho}(-\pi)^p r^p}{n'^p\Delta'_{\tilde\beta}\Delta_A}}\; e^{-n'\Phi}\, e^{\frac{n'^2}{n}\psi(g,h)}\, e^{\tilde\varphi'(\mathring\delta)}\tilde G'[\mathring\sigma]\, H'[\mathring\tau] \\ &\times\sum_{\substack{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p\\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1,\ldots,nrs-1} e^{-\frac{1}{nrs}\sum\limits_\nu \eta_\nu\eta'_\nu\pi i-\frac{1}{n'}\sum\limits_\mu \varkappa_\mu\lambda_\mu\pi i-\frac{n'}{nrs}\sum\limits_\nu\sum\limits_\mu(\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu-\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta'_\nu)\pi i-\frac{2n'}{nrs}\sum\limits_\nu \hat g_\nu\eta'_\nu\pi i} \\ &\times e^{-\frac{2}{nrs}\sum\limits_\nu(n'\hat g_\nu+\mathring\delta_\nu+\eta_\nu)\mathring\varepsilon_\nu\pi i}\cdot L'^{(a,n')}_{\substack{\varkappa_1\ldots\varkappa_p\\ \lambda_1\ldots\lambda_p}}\,\vartheta^n\begin{bmatrix}\frac{n'\hat g+\mathring\delta-r\mathring\varepsilon+\eta}{nr}\\ \frac{n'\hat h+\mathring\tau+\eta'}{ns}\end{bmatrix}(\!(v)\!)_b. \end{aligned}$$

In dieser Formel ist zunächst:

$$v_\nu = \frac{\pi i}{\varDelta_A} \sum_\mu A'_{\mu\nu} u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{\pi i}{\varDelta_A} \sum_\mu A'_{\mu\nu} B_{\mu\nu'}, \qquad {\scriptstyle (\nu,\nu'=1,2,\ldots,p)}$$

wenn man mit $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ die Ausdrücke:

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{r}\Big(\alpha_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \beta_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}\Big), \qquad B_{\mu\nu} = \frac{1}{s}\Big(\gamma_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \delta_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}\Big), \qquad {\scriptstyle (\mu,\nu=1,2,\ldots,p)}$$

mit $\varDelta_A$ die Determinante $\Sigma \pm A_{11} A_{22} \ldots A_{pp}$ und mit $A'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $A_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet; es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\eta_\nu = \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu - \beta_{\nu\mu}\lambda_\mu), \qquad \eta'_\nu = \sum_\mu(-\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu + \delta_{\nu\mu}\lambda_\mu),$$

$$\hat{g}_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu} + \sum_\mu(\alpha_{\nu\mu}g_\mu - \beta_{\nu\mu}h_\mu), \qquad \hat{h}_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu} + \sum_\mu(-\gamma_{\nu\mu}g_\mu + \delta_{\nu\mu}h_\mu), \qquad {\scriptstyle (\nu=1,2,\ldots,p)}$$

$$\Phi = \frac{1}{r\varDelta_A} \sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu \beta_{\nu\mu} A'_{\mu'\nu} u_\mu u_{\mu'},$$

$$\psi(g,h) = \frac{1}{rs} \sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu (\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu'}g_\mu g_{\mu'} - 2\gamma_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu'}g_\mu h_{\mu'} + \beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu'}h_\mu h_{\mu'})\pi i$$
$$- \frac{1}{rs} \sum_\nu \sum_\mu \sum_{\mu'} \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}(\alpha_{\nu\mu'}g_{\mu'} - \beta_{\nu\mu'}h_{\mu'})\pi i;$$

es sind weiter mit $\varDelta'_{\tilde\beta}$, $\tilde\varphi'(\mathring{\sigma})$, $\tilde G'[\mathring{\sigma}]$, $H'[\mathring{\tau}]$, n'_1, n'_2 jene Grössen bezeichnet, in welche die bei der Formel (L) auf Seite 118 definirten Grössen $\varDelta_{\tilde\beta}$, $\tilde\varphi(\mathring{\sigma})$, $\tilde G[\sigma]$, $H[\mathring{\tau}]$, n_1, n_2 übergehen, wenn man darin:

$$r, \quad s, \quad \alpha_{\mu\nu}, \quad \beta_{\mu\nu}, \quad \gamma_{\mu\nu}, \quad \delta_{\mu\nu}$$

für jedes μ und ν von 1 bis p durch:

$$nr, \quad s, \quad n'\alpha_{\mu\nu}, \quad \beta_{\mu\nu}, \quad n'\gamma_{\mu\nu}, \quad \delta_{\mu\nu}$$

ersetzt; es gilt ferner bezüglich der Bedeutung von ϱ und der $\tilde\alpha$, $\tilde\beta$, $\tilde\gamma$, $\tilde\delta$ das auf Seite 120 Bemerkte; es ist weiter zur Abkürzung gesetzt:

$$L^{(b,n)}_{\mathring{\varepsilon}_1\ldots\mathring{\varepsilon}_p} = \sum_{\substack{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p\\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1,\ldots,nrs-1}{}' e^{-\frac{n'^2}{nrs}\sum_\nu \eta_\nu\eta'_\nu\pi i - n'\sum_\mu \varkappa_\mu\lambda_\mu\pi i + \frac{2n'}{nrs}\sum_\nu\left[\left(\mathring{\varepsilon}_\nu + \frac{n'}{2}\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\eta_\nu - \left(\delta_\nu + \frac{n'}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\eta'_\nu\right]\pi i}$$
$$\times K^{(b,n)}_{\mathring{\varepsilon}_1 + \frac{n'\eta_1}{r}\ldots\mathring{\varepsilon}_p + \frac{n'\eta_p}{r}},$$

wobei $\varepsilon_1, \ldots, \hat\varepsilon_p$ irgend welche ganze Zahlen bezeichnen, und der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass an Stelle des Systems der $2p$ Grössen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ von den $(nrs)^{2p}$ Variationen der Elemente $0, 1, \ldots, nrs-1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung nur diejenigen treten sollen, für welche die p Zahlen $n'\eta_1, n'\eta_2, \ldots, n'\eta_p$ sämmtlich durch r und die p Zahlen $n'\eta'_1, n'\eta'_2, \ldots, n'\eta'_p$ sämmtlich durch s theilbar sind, und:

$$L'^{(a,n')}_{\substack{x_1 \dots x_p \\ \lambda_1 \dots \lambda_p}} = \sum_{\substack{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p \\ \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_p}}^{0,1,\dots,nrs-1}{}' e^{\frac{1}{nrs} \sum\limits_{\nu} \bar{\eta}_\nu \bar{\eta}'_\nu \pi i - \frac{1}{n'} \sum\limits_{\mu} \bar{x}_\mu \bar{\lambda}_\mu \pi i + \frac{2}{nrs} \sum\limits_{\nu} \left[\left(\varepsilon_\nu + \frac{n'}{2} \sum\limits_{\mu} \gamma_{\nu\mu} \delta_{\nu\mu}\right) \bar{\eta}_\nu - \left(\delta_\nu + \frac{n'}{2} \sum\limits_{\mu} \alpha_{\nu\mu} \beta_{\nu\mu}\right) \bar{\eta}'_\nu\right] \pi i}$$

$$\times e^{\frac{2}{n'} \sum\limits_{\mu} \bar{x}_\mu \lambda_\mu \pi i} K^{(a,n')}_{x_1 - \bar{x}_1 \dots x_p - \bar{x}_p},$$

wobei der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass an Stelle des Systems der $2p$ Grössen $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_p$ von den $(nrs)^{2p}$ Variationen der Elemente $0, 1, \dots, nrs - 1$ zur $2p^{\text{ten}}$ Classe mit Wiederholung nur diejenigen treten sollen, für welche die p Zahlen $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \dots, \bar{\eta}_p$ sämmtlich durch nr und die p Zahlen $\bar{\eta}'_1, \bar{\eta}'_2, \dots, \bar{\eta}'_p$ sämmtlich durch s theilbar sind; es bezeichnen endlich:

n_3 die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$s\eta_1 \equiv 0 \text{ (mod. } nrs), \quad s\eta_2 \equiv 0 \text{ (mod. } nrs), \quad \dots, \quad s\eta_p \equiv 0 \text{ (mod. } nrs),$$
$$r\eta'_1 \equiv 0 \text{ (mod. } nrs), \quad r\eta'_2 \equiv 0 \text{ (mod. } nrs), \quad \dots, \quad r\eta'_p \equiv 0 \text{ (mod. } nrs),$$

n_4 die Anzahl der Normallösungen des Congruenzensystems:

$$nn's\eta_1 \equiv 0 \text{ (mod. } nrs), \quad nn's\eta_2 \equiv 0 \text{ (mod. } nrs), \quad \dots, \quad nn's\eta_p \equiv 0 \text{ (mod. } nrs),$$
$$nn'r\eta'_1 \equiv 0 \text{ (mod. } nrs), \quad nn'r\eta'_2 \equiv 0 \text{ (mod. } nrs), \quad \dots, \quad nn'r\eta'_p \equiv 0 \text{ (mod. } nrs).$$

5.

Setzt man in der Formel (A) $r = s = 1$, wodurch auch $n' = 1$ wird, so erhält man die der ganzzahligen, zur Zahl n gehörigen Transformation:

$$T = \left|\begin{array}{c|c} \alpha_{\mu\nu} & \beta_{\mu\nu} \\ \hline \gamma_{\mu\nu} & \delta_{\mu\nu} \end{array}\right|,$$

bei der zwischen den ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die $p(2p-1)$ Relationen:

$$(T_1) \quad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\varepsilon\mu} \gamma_{\varepsilon\mu'} - \alpha_{\varepsilon\mu'} \gamma_{\varepsilon\mu}) = 0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\beta_{\varepsilon\mu} \delta_{\varepsilon\mu'} - \beta_{\varepsilon\mu'} \delta_{\varepsilon\mu}) = 0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\varepsilon\mu} \delta_{\varepsilon\mu'} - \gamma_{\varepsilon\mu} \beta_{\varepsilon\mu'}) = \begin{matrix} n, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{matrix} \end{gathered} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \dots, p)$$

oder die damit äquivalenten:

$$(T_2) \quad \begin{gathered} \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\mu\varepsilon} \beta_{\mu'\varepsilon} - \alpha_{\mu'\varepsilon} \beta_{\mu\varepsilon}) = 0, \qquad \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\gamma_{\mu\varepsilon} \delta_{\mu'\varepsilon} - \gamma_{\mu'\varepsilon} \delta_{\mu\varepsilon}) = 0, \\ \sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=p} (\alpha_{\mu\varepsilon} \delta_{\mu'\varepsilon} - \beta_{\mu\varepsilon} \gamma_{\mu'\varepsilon}) = \begin{matrix} n, \text{ wenn } \mu' = \mu, \\ 0, \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \end{matrix} \end{gathered} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \dots, p)$$

erfüllen, entsprechende Thetaformel in der Gestalt:

$$(A_1)\qquad \Delta_{\tilde\beta}^{p-1}\, L^{(b,\,n)}_{\mathring{\imath}_1 \ldots \mathring{\imath}_p}\, \vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sqrt[+]{\frac{i^{p-\varrho}(-\pi)^p}{\Delta_{\tilde\beta}\Delta_A}}\; e^{-\Phi}\, e^{\frac{1}{n}\psi(g,\,h)}\, e^{\tilde\psi(\delta)}\, \tilde G[\mathring{\sigma}]$$

$$\times \sum_{\substack{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_p\\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_\nu \eta_\nu \eta'_\nu \pi i + \sum\limits_\mu \varkappa_\mu \lambda_\mu \pi i - \frac{1}{n}\sum\limits_\nu \sum\limits_\mu (\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\eta_\nu - \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\eta'_\nu)\pi i}$$

$$\times\, e^{-\frac{2}{n}\sum\limits_\nu \hat g_\nu \eta'_\nu \pi i - \frac{2}{n}\sum\limits_\nu (\hat g_\nu + \mathring{\delta}_\nu + \eta_\nu)\mathring{\imath}_\nu \pi i}\; \vartheta^n\begin{bmatrix} \dfrac{\hat g + \mathring{\sigma} - \mathring{\varepsilon} + \eta}{n} \\[2mm] \dfrac{\hat h + \mathring{\imath} + \eta'}{n} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b .$$

In dieser Formel ist zunächst:

$$v_\nu = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_\mu A'_{\mu\nu} u_\mu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{\pi i}{\Delta_A}\sum_\mu A'_{\mu\nu} B_{\mu\nu'}, \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

wenn man mit $A_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ die Ausdrücke:

$$A_{\mu\nu} = \alpha_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \beta_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}, \qquad B_{\mu\nu} = \gamma_{\nu\mu}\pi i + \sum_\varkappa \delta_{\nu\varkappa} a_{\mu\varkappa}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$$

mit Δ_A die Determinante $\Sigma \pm A_{11} A_{22} \ldots A_{pp}$ und mit $A'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $A_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet; es ist ferner zur Abkürzung gesetzt:

$$\eta_\nu = \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu}\varkappa_\mu - \beta_{\nu\mu}\lambda_\mu), \qquad \eta'_\nu = \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu}\varkappa_\mu + \delta_{\nu\mu}\lambda_\mu), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

$$\hat g_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu} + \sum_\mu (\alpha_{\nu\mu} g_\mu - \beta_{\nu\mu} h_\mu), \qquad \hat h_\nu = \tfrac{1}{2}\sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu} + \sum_\mu (-\gamma_{\nu\mu} g_\mu + \delta_{\nu\mu} h_\mu),$$

$$\Phi = \frac{1}{\Delta_A}\sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu \beta_{\nu\mu} A'_{\mu'\nu} u_\mu u_{\mu'},$$

$$\psi(g,h) = \sum_\mu \sum_{\mu'} \sum_\nu (\alpha_{\nu\mu}\gamma_{\nu\mu'} g_\mu g_{\mu'} - 2\gamma_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu'} g_\mu h_{\mu'} + \beta_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu'} h_\mu h_{\mu'})\pi i - \sum_\nu \sum_\mu \sum_{\mu'} \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}(\alpha_{\nu\mu'} g_{\mu'} - \beta_{\nu\mu'} h_{\mu'})\pi i,$$

$$\tilde\varphi(\mathring{\delta}) = -\sum_\nu \sum_{\nu'} \sum_\varepsilon \frac{\tilde\delta_{\nu\varepsilon}\tilde\beta'_{\nu'\varepsilon}}{n\Delta_{\tilde\beta}} \Big(\mathring{\delta}_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_\mu \alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\Big)\Big(\mathring{\delta}_{\nu'} + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu'} \alpha_{\nu'\mu'}\beta_{\nu'\mu'}\Big)\pi i$$

$$- \frac{1}{n}\sum_\nu \sum_\mu \gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\Big(\mathring{\delta}_\nu + \tfrac{1}{2}\sum_{\mu'} \alpha_{\nu\mu'}\beta_{\nu\mu'}\Big)\pi i,$$

$$\tilde G[\mathring{\delta}] = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,\Delta_{\tilde\beta}-1} e^{-\sum\limits_\mu \sum\limits_{\mu'} \sum\limits_\nu \frac{\tilde\alpha_{\nu\mu}\tilde\beta'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\tilde\beta}} \varrho_\mu \varrho_{\mu'}\pi i + 2\sum\limits_\mu \sum\limits_\nu \frac{\tilde\beta'_{\nu\mu}}{\Delta_{\tilde\beta}}\left(\mathring{\delta}_\nu + \frac{1}{2}\sum\limits_\varepsilon \alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right)\varrho_\mu \pi i},$$

wobei $\Delta_{\tilde\beta}$ die Determinante $\Sigma \pm \tilde\beta_{11}\tilde\beta_{22} \ldots \tilde\beta_{pp}$ und $\tilde\beta'_{\mu\nu}$ die Adjuncte von $\tilde\beta_{\mu\nu}$ in dieser Determinante bezeichnet, und unter $\mathring{\delta}_1, \mathring{\delta}_2, \ldots, \mathring{\delta}_p$ eine beliebige Lösung des Gleichungensystems:

$$(\tilde{E}) \qquad \begin{cases} e^{-\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\mu'}\sum\limits_{\nu}\frac{\tilde{\alpha}_{\nu\mu}\tilde{\beta}'_{\nu\mu'}}{\Delta_{\tilde{\beta}}}\bar{\varrho}_{\mu}^{(i)}\bar{\varrho}_{\mu'}^{(i)}\pi i+2\sum\limits_{\mu}\sum\limits_{\nu}\frac{\tilde{\beta}'_{\nu\mu}}{\Delta_{\tilde{\beta}}}\left(\sigma_{\nu}+\frac{1}{2}\sum\limits_{\varepsilon}\alpha_{\nu\varepsilon}\beta_{\nu\varepsilon}\right)\bar{\varrho}_{\mu}^{(i)}\pi i} = 1, \\ i = 1, 2, \ldots, m, \end{cases}$$

ist, in dem $\bar{\varrho}_1^{(i)}, \bar{\varrho}_2^{(i)}, \ldots, \bar{\varrho}_p^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ die sämmtlichen Normallösungen des Congruenzensystems:

$$(\tilde{C}) \qquad \sum_{\mu'}\sum_{\nu}\tilde{\alpha}_{\nu 1}\tilde{\beta}'_{\nu\mu'}\bar{\varrho}_{\mu'} \equiv 0 \ (\text{mod. } \Delta_{\tilde{\beta}}), \ \ldots, \ \sum_{\mu'}\sum_{\nu}\tilde{\alpha}_{\nu p}\tilde{\beta}'_{\nu\mu'}\bar{\varrho}_{\mu'} \equiv 0 \ (\text{mod. } \Delta_{\tilde{\beta}})$$

bezeichnen; es gilt weiter bezüglich der Bedeutung von ϱ und der $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\delta}$ das auf Seite 120 Bemerkte, es bezeichnen $\mathring{\tau}_1, \ldots, \mathring{\tau}_p$ beliebige ganze Zahlen, und es ist endlich zur Abkürzung gesetzt:

$$L^{(b,n)}_{\mathring{\varepsilon}_1\ldots\mathring{\varepsilon}_p} = \sum_{\substack{x_1,\ldots,x_p \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_p}}^{0,1,\ldots,n-1} e^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu}\eta_{\nu}\eta'_{\nu}\pi i+\sum\limits_{\mu}x_{\mu}\lambda_{\mu}\pi i+\frac{2}{n}\sum\limits_{\nu}\left[\left(\mathring{\tau}_{\nu}+\frac{1}{2}\sum\limits_{\mu}\gamma_{\nu\mu}\delta_{\nu\mu}\right)\eta_{\nu}-\left(\delta_{\nu}+\frac{1}{2}\sum\limits_{\mu}\alpha_{\nu\mu}\beta_{\nu\mu}\right)\eta'_{\nu}\right]\pi i}$$
$$\times K^{(b,n)}_{\mathring{\varepsilon}_1+\eta_1\ldots\mathring{\varepsilon}_p+\eta_p},$$

wobei $\mathring{\varepsilon}_1, \ldots, \mathring{\varepsilon}_p$ irgend welche ganze Zahlen bezeichnen.

Aus den Formeln (A), (A_1) erhält man, indem man an Stelle der α, β, γ, δ specielle Zahlenwerthe einführt, die einer jeden beliebigen vorgelegten Transformation entsprechende Thetaformel. Von den zahlreichen bemerkenswerthen speciellen Transformationsformeln, welche auf diese Weise entstehen, seien zum Schlusse hier die vier folgenden aufgeführt.

Es werden die Lösungen der durch die Charakteristiken:

$$T_1 = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \ldots & 0 & & & \\ & \ldots & & & 0 & \\ 0 & \ldots & 1 & & & \\ \hline & & & \frac{1}{r} & \ldots & 0 \\ & 0 & & & \ldots & \\ & & & 0 & \ldots & \frac{1}{r} \end{array}\right|, \qquad T_1^{-1} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \ldots & 0 & & & \\ & \ldots & & & 0 & \\ 0 & \ldots & 1 & & & \\ \hline & & & r & \ldots & 0 \\ & 0 & & & \ldots & \\ & & & 0 & \ldots & r \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsprobleme durch die Formeln:

$$(\Theta_1) \qquad r^p\,\vartheta^r\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_p}^{0,1,\ldots,r-1} L^{(a,r)}_{\lambda_1\ldots\lambda_p}\,\vartheta\begin{bmatrix} rg \\ h+\frac{\lambda}{r} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b\, e^{-2\pi i\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} g_{\mu}\lambda_{\mu}},$$

$$(\overline{\Theta}_1) \qquad L^{(a,r)}_{\lambda_1\ldots\lambda_p}\,\vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b = \sum_{\varrho_1,\ldots,\varrho_p}^{0,1,\ldots,r-1}\vartheta^r\begin{bmatrix} \frac{k+\varrho}{r} \\ l-\frac{\lambda}{r} \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a\, e^{\frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(k_{\mu}+\varrho_{\mu})\lambda_{\mu}}$$

gegeben, bei denen die Grössen u, a mit den Grössen v, b durch die Gleichungen:

$$v_\nu = u_\nu, \qquad b_{\nu\nu'} = \frac{a_{\nu\nu'}}{r}, \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

oder durch die damit äquivalenten:

$$u_\mu = v_\mu, \qquad a_{\mu\mu'} = r b_{\mu\mu'} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

verknüpft sind, bei denen ferner allgemein:

$$L^{(a,r)}_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = \sum_{i_1, \ldots, i_p}^{0,1,\ldots,r-1} K^{(a,r)}_{i_1 \ldots i_p}\, e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} i_\mu \lambda_\mu}$$

gesetzt ist, und bei denen die g, h, k, l beliebige reelle Constanten, die $\mathring{\lambda}$ irgend welche ganze Zahlen bezeichnen.

Es werden ferner die Lösungen der durch die Charakteristiken:

$$T_2 = \left|\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{r} & \cdots & 0 & & & \\ & \cdots & & & 0 & \\ 0 & \cdots & \frac{1}{r} & & & \\ \hline & & & \frac{1}{r} & \cdots & 0 \\ & 0 & & & \cdots & \\ & & & 0 & \cdots & \frac{1}{r} \end{array}\right|, \qquad T_2^{-1} = \left|\begin{array}{ccc|ccc} r & \cdots & 0 & & & \\ & \cdots & & & 0 & \\ 0 & \cdots & r & & & \\ \hline & & & r & \cdots & 0 \\ & 0 & & & \cdots & \\ & & & 0 & \cdots & r \end{array}\right|$$

bestimmten Transformationsprobleme durch die Formeln:

$$(\Theta_2) \quad r^p\, \vartheta^{r^2}\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a = \sum_{\substack{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p}}^{0,1,\ldots,r-1} L^{(a,r^2)}_{\substack{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p \\ \lambda_1 \ldots \lambda_p}}\, \vartheta\begin{bmatrix} rg + \frac{\varkappa}{r} \\ rh + \frac{\lambda}{r} \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b\, e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\left(rg_\mu + \frac{\varkappa_\mu}{r}\right)\frac{\lambda_\mu}{r}},$$

$$(\overline{\Theta}_2) \quad r^p\, L^{(a,r^2)}_{\substack{\mathring{\varkappa}_1 \ldots \mathring{\varkappa}_p \\ \mathring{\lambda}_1 \ldots \mathring{\lambda}_p}}\, \vartheta\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}(\!(v)\!)_b = \sum_{\substack{\varrho_1, \ldots, \varrho_p \\ \sigma_1, \ldots, \sigma_p}}^{0,1,\ldots,r-1} \vartheta^{r^2}\begin{bmatrix} \frac{k}{r} - \frac{\mathring{\varkappa}}{r^2} + \frac{\varrho}{r} \\ \frac{l}{r} - \frac{\mathring{\lambda}}{r^2} + \frac{\sigma}{r} \end{bmatrix}(\!(u)\!)_a\, e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} k_\mu \sigma_\mu + \frac{2\pi i}{r}\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p}(k_\mu + \varrho_\mu)\mathring{\lambda}_\mu}$$

gegeben, bei denen die Grössen u, a mit den Grössen v, b durch die Gleichüngen:

$$v_\nu = r u_\nu, \qquad b_{\nu\nu'} = a_{\nu\nu'}, \qquad (\nu, \nu' = 1, 2, \ldots, p)$$

oder durch die damit äquivalenten:

$$u_\mu = \frac{v_\mu}{r}, \qquad a_{\mu\mu'} = b_{\mu\mu'} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p)$$

verknüpft sind, bei denen ferner allgemein:

$$L^{(a,r^2)}_{\substack{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p \\ \lambda_1 \ldots \lambda_p}} = \sum_{i_1, \ldots, i_p}^{0,1,\ldots,r-1} K^{(a,r^2)}_{ri_1 + \varkappa_1 \ldots ri_p + \varkappa_p}\, e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum\limits_{\mu=1}^{\mu=p} i_\mu \lambda_\mu}$$

gesetzt ist, und bei denen die g, h, k, l beliebige reelle Constanten, die $\mathring{\varkappa}$, $\mathring{\lambda}$ irgend welche ganze Zahlen bezeichnen.

Koenigsberger, Dr. **Leo**, ord. Prof. a. d. Universität zu Heidelberg, Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale. [IV u. 170 S.] gr. 8. 1878. geh. n. ℳ 4.80.

——— zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826—1879. [104 S.] gr. 8. 1879. geh. n. ℳ 2.40.

Krause, Martin, Professor der Mathematik an der Universität zu Rostock, die Transformation der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung. Nebst Anwendungen. [VII u. 276 S.] gr. 8. 1886. geh. ℳ 10.—

Lindemann, Dr. **F.**, Prof. an der Universität zu Freiburg i. B., Untersuchungen über den Riemann-Roch'schen Satz. [40 S.] gr. 8. 1879. geh. ℳ 1.—

Lommel, Dr. **Eugen**, Professor der Experimentalphysik an der Universität zu München, Studien über die Bessel'schen Functionen. [VII u. 135 S.] gr. 8. 1868. geh. n. ℳ 3.—

Neumann, Dr. **Carl**, ord. Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. Zweite vollständig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Holzschnitten u. einer lithographirten Tafel. [XIV u. 472 S.] gr. 8. 1884. geh. n. ℳ 12.—

——— Theorie der Bessel'schen Functionen. Ein Analogon zur Theorie der Kugelfunctionen. [VIII u. 72 S.] gr. 8. 1867. geh. n. ℳ 2.

——— über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunctionen fortschreitenden Entwicklungen, unter durchgängiger Anwendung des Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatzes. [VIII u. 140 S.] gr. 4. 1881. geh. n. ℳ 7.20.

Neumann, Dr. **Franz**, Prof. der Physik und Mineralogie an der Universität zu Königsberg, Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen. I. u. II. Abth. [In einem Band.] [156 S.] gr. 4. 1878. geh. n. ℳ 8.—

——— 6. Heft: Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Herausgegeben von Dr. Carl Neumann, ord. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig. Mit Figuren im Text. [XVI u. 364 S.] gr. 8. 1887. geh. n. ℳ 12.

Rausenberger, Dr. **Otto**, Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen einer Variabeln mit einer endlichen Anzahl wesentlicher Discontinuitätspunkte nebst einer Einleitung in die allgemeine Functionentheorie. Mit in den Text gedruckten Figuren. [VIII u. 476 S.] gr. 8. 1884. geh. n. ℳ 10.80.

Riemann's, Bernhard, gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Herausgegeben unter Mitwirkung von Richard Dedekind von Heinrich Weber. Zweite Auflage bearbeitet von Heinrich Weber. Mit einem Bildniss Riemanns. [X u. 558 S.] gr. 8. 1892. geh. n. ℳ 18.—

Roch, Dr. **G.**, de theoremate quodam circa functiones Abelianas. [12 S.] 4. 1864. geh. ℳ —.60.

Schapira, Dr. **H.**, Prof. an der Universität Heidelberg, Theorie allgemeiner Cofunctionen und einige ihrer Anwendungen. I. Band. 2. Theil. 1. Heft. [VIII u. 224 S.] gr. 8. 1892. geh.

——— Erweiterung der Begriffe der arithmetischen Grundoperationen und der allgemeinen Cofunctionen. [20 S.] gr. 4. 1882. geh. ℳ 1.—

——— Grundlage zu einer Theorie allgemeiner Cofunctionen. [20 S.] gr. 4. 1881. geh. n. ℳ 1.20.

Schottky, Dr. **F.**, Privatdoc. a. d. Univers. Breslau, Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variabeln. [162 S.] gr. 8. 1880. geh. n. ℳ 4.—

